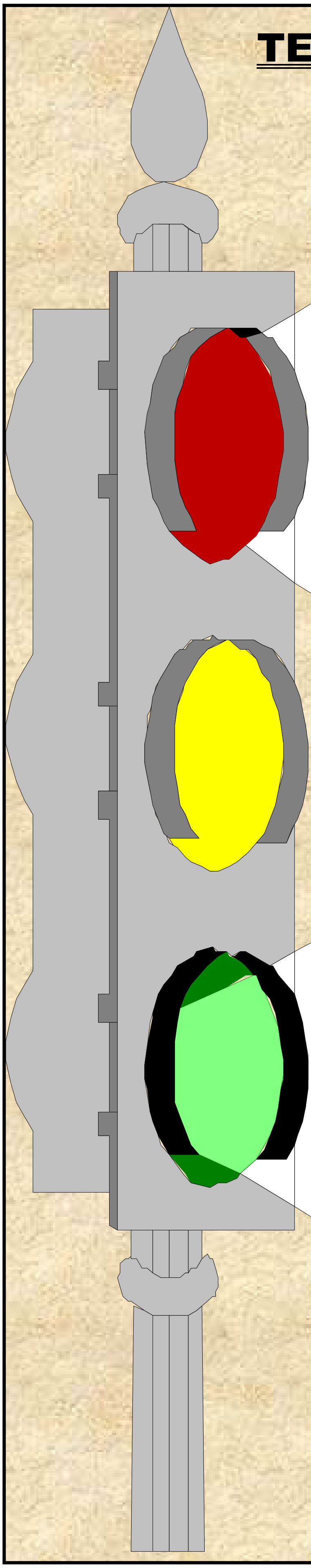

MATEMÁTICAS
TOMO I

TEMA 1.- Los números enteros.



OBJETIVOS:

1. Saber ordenar y representar gráficamente sobre la recta real números enteros.
2. Aplicar correctamente la regla de los signos en el cálculo de expresiones algebraicas con números enteros.
3. Calcular expresiones numéricas sin/con paréntesis aplicando la prioridad de las operaciones.
4. Aplicar la propiedad distributiva y extraer factor común en expresiones numéricas.
5. Saber descubrir los posibles errores en operaciones diversas con números enteros.
6. Resolver problemas de aplicación a la vida cotidiana relacionados con números enteros.

CONTENIDOS:

De conceptos:

1.- Introducción al concepto de número entero.
2.- Representación gráfica de números enteros.
3.- Valor absoluto de un número entero.
4.- Opuesto de un número entero.
5.- Ordenación de números enteros.
6.- Suma de números enteros.
7.- Propiedades de la suma de enteros.
8.- Resta de números enteros.
9.- Sumas y restas gráficas en una recta entera.
10.- Sumas y restas combinadas.
11.- Escritura abreviada de las sumas y restas.
12.- Operaciones de enteros en las que hay paréntesis y corchetes.
13.- Producto y división de números enteros.
14.- Propiedades del producto de enteros.
15.- Errores más comunes al operar con enteros.
16.- Operaciones combinadas de números enteros.
17.- Detectar errores y analizarlos.
18.- Problemas relacionados con números enteros.
19.- Las coordenadas en el plano.

Además, ejercicios y problemas de repaso global del tema y modelos de controles con las soluciones correspondientes.

Y, por supuesto, algunas reflexiones.

De procedimientos:

1. Ordenación de números enteros.
2. Representación gráfica de números enteros sobre la línea recta entera.
3. Cálculo de sumas algebraicas aplicando las reglas de los signos.
4. Cálculo de expresiones numéricas con productos y divisiones de enteros.
5. Cálculo de expresiones numéricas con/sin paréntesis aplicando las reglas de prioridad en las operaciones.
6. Cálculo del factor común en una expresión numérica.

De actitudes:

1. Reconocimiento y valoración del lenguaje numérico para representar y resolver problemas de la vida cotidiana.
2. Incorporación del lenguaje numérico a la forma de proceder habitual.
3. Interés por enfrentarse a problemas numéricos.
4. Gusto por la precisión, el orden y la claridad en los problemas y cálculos numéricos.

1.1.- Introducción.

En la vida cotidiana existen situaciones, relacionadas con números, que no se pueden expresar con números naturales (N = 0, 1, 2, 3, 4, 5…). Veamos algunos ejemplos:

a) La situación existente entre un Banco o Caja, un cliente y el dinero.

Si a Fortunato le tocan tres millones de euros en una quiniela, esa situación se representaría con el número natural "3". Sin embargo, si Sergio pide un préstamo a un Banco o una Caja de tres millones, esa situación no se representa con el número natural "3", porque entonces sería lo mismo ganar tres millones que pedirlos prestados.

Para poder entendernos y no confundirnos, emplearemos en estas situaciones los llamados números enteros. Así, la situación de Sergio que debe tres millones la representamos con el número entero negativo "– 3", y la de Fortunato con el entero positivo "+ 3".

Los abonos o ingresos serán números positivos (+).

Los adeudos o préstamos serán números negativos (–).

b) Las temperaturas.

Raquel dice que una mañana floreada y olorosa del mes de mayo estaba a cinco grados sobre cero. Y Concha que al amanecer de una gélida mañana de invierno el termómetro marcaba cinco grados bajo cero. Nos piden representar con un número, sin añadir palabras explicativas, las dos situaciones.

Está claro que si sólo disponemos de números naturales nos confundiríamos, ya que usaríamos el 5 para las dos situaciones, y no sabríamos distinguir entre la que estaba sobre cero y bajo cero grados. Por ello, los números enteros nos sirven para expresar esas situaciones de forma correcta. Empleamos el "+ 5" para Raquel y el "– 5" para Concha.

Las temperaturas sobre (por encima de) "0" serán números positivos (+).

Las temperaturas bajo (menores) "0" serán números negativos (–).

c) La situación de algo o alguien referida al nivel del mar.

Para expresar que un avión vuela a dos mil metros, lo hacemos con el número entero positivo "+ 2000", y para expresar numéricamente que un submarino navega a una profundidad de dos mil metros, lo haremos con el entero negativo "– 2000".

Por encima del nivel del mar…….. números positivos (+).

Por debajo del nivel del mar…..…. números negativos (–).

d) El calendario cristiano, o sea, el tiempo que se considera en torno al hecho del nacimiento de Jesucristo.

Para expresar con número el año de nacimiento de Cervantes, usaremos el entero positivo "+ 1547", ya que nuestro más universal escritor nació el año 1547 después de Cristo. Y para expresar cuándo nació Pitágoras (famoso matemático griego), lo hacemos con el número entero negativo "– 580", ya que nació el año 580 antes de Cristo.

Las fechas después de Cristo……números positivos (+).

Las fechas antes de Cristo.............números negativos (–).

e) Las cantidades que gana o gasta una persona.

Si Benjamín gana en un premio de Lotería Primitiva doscientos cincuenta euros, usaremos el entero positivo "+ 250", y si Joaquina gasta en un fin de semana treinta y cuatro euros –*ciertamente, demasiado dinero; así no llegará a "buen puerto"*- emplearemos el número entero negativo "– 34".

Las cantidades que se ganan (o tienen).....números positivos (+).

Las cantidades que se gastan……….números negativos (–).

Las situaciones descritas anteriormente no podrían diferenciarse con números naturales ("N"), sino que sería necesario, además, indicar la referencia a una cierta situación considerada como **ORIGEN** (cantidad "0"), ya que como hemos visto sólo con el número natural correspondiente se confundirían y no representarían correctamente los hechos relatados. A continuación veremos cuáles son los orígenes de cada una de las situaciones descritas.

- En la situación **a)**, el **origen** es no tener nada ni deber nada.................................. **0 €**.
- En la situación **b)**, el **origen** es el 0º C (centígrados, escala Celsius) .... **0 º**.
- En la situación **c)**, el **origen** es la situación al nivel del mar.. **0 m**.
- En la situación **d)**, el **origen** es el año en que nació Cristo.. **Año 0**.
- En la situación **e)**, el **origen** es no ganar ni gastar nada.. **0 €.**

De todo lo anteriormente expuesto, deducimos que es conveniente unificar la notación para todas las situaciones, sean las descritas aquí u otras muy diversas. Por ello, quedamos de acuerdo en escribir las cantidades con estas reglas:

Se coloca el signo **"+"** delante de las cantidades positivas.

- Se designa con el número **"0"** a todas las situaciones origen (ni positivo ni negativo).

Se coloca el signo **"–"** delante de las cantidades negativas.

Así llegamos a los **números enteros**.

- Un número entero es un **número natural precedido del signo** + o del signo **–**. Todos los que lleven el signo + forman los **enteros positivos** y todos los que llevan el signo – forman los **enteros negativos**.

- Al conjunto de los números enteros se le designa con la letra **"Z"**.

- En realidad, el conjunto de los números enteros es una **ampliación del conjunto de los números naturales**. Como hay situaciones negativas que no pueden expresarse con números naturales, es necesario hacer una ampliación (un conjunto mayor de números) de "N" para meter en el nuevo conjunto ("Z") a los números negativos. *(Aunque no sea muy académico, imagínate que los naturales están metidos en un saco; bien, pues los números enteros estarían en un saco mayor que contiene a ese saco de los naturales; y dentro del saco grande, pero fuera del saco pequeño de "N", estarían todos los números negativos)*

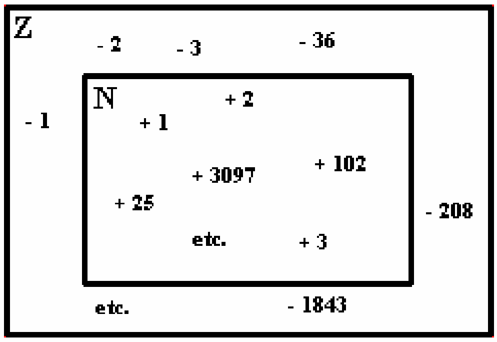
- Esquemáticamente:

$$N = \{0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, \ldots, +\infty\}$$

$$Z = \{-\infty, \ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots, +\infty\}$$

Observa que los números naturales empiezan en el cero (0), pero no terminan. Y que los números **enteros** no empiezan, sino que son **infinitos por ambos lados**, tanto por el negativo como por el positivo.

- Si hacemos la representación en un diagrama:



Es muy conveniente que observes que **todos los** números **naturales** (N) **pertenecen** (están metidos) **a los** números **enteros** (Z). Sin embargo, no todos los números enteros (Z) pertenecen (están dentro) a los naturales (N). Por ejemplo, el número + 5 pertenece a los naturales y a los enteros; el número **– 5 no pertenece a los naturales y sí a los enteros**. Es decir, ningún número negativo es natural. Y todos **los positivos, los negativos y el cero forman "Z"** (conjunto de todos los enteros).

- Bueno, ésta es una "pequeña historia" que nos introduce en el estudio de los números enteros. El llamar a estos **números enteros**, aunque no sea una explicación muy académica, tiene su significado. Algo entero es algo que no está partido, y los números enteros se llaman así porque **no están "partidos"**, es decir, **no tienen decimales** (partes). Si decimos que + 6, – 9, + 507, – 2398, etc., son enteros nos estamos refiriendo a unidades enteras de algo y no partidas, ya que no tienen parte decimal. Por ello, ningún número decimal ("partido") pertenece al conjunto de los números enteros. O sea, en el ficticio saco de los enteros no hay ningún número decimal.

Veamos algunos ejemplos para ver si has comprendido bien la identidad de los números naturales y enteros, es decir, si sabes **descubrir** (distinguir) correctamente **los números enteros de los que no lo son.**

En primer lugar, hay seis ejercicios resueltos.

Como puedes ver, en cada uno se responde de tres formas, que en realidad significan lo mismo. Tú debes hacer así los primeros, pero cuando ya lo sepas bien, los haces sólo con los símbolos (3ª forma), o sea, como el número 6.

1) 5 → $\begin{cases} \text{Es n° natural y entero} \\ \text{Pertenece a N y a Z} \\ \in \mathbf{N} ; \in \mathbf{Z} \end{cases}$

2) 0 → $\begin{cases} \text{Es n° natural y entero} \\ \text{Pertenece a N y a Z} \\ \in \mathbf{N} ; \in \mathbf{Z} \end{cases}$

3) + 15 → $\begin{cases} \text{Es n° natural y entero} \\ \text{Pertenece a N y a Z} \\ \in \mathbf{N} ; \in \mathbf{Z} \end{cases}$

4) – 3 → $\begin{cases} \text{No n° natural; sí es entero} \\ \text{No pertenece a N; sí pertenece a Z} \\ \notin \mathbf{N} ; \in \mathbf{Z} \end{cases}$

5) 4'8 → $\begin{cases} \text{No es n° natural ni entero} \\ \text{No pertenece a N ni a Z} \\ \notin \mathbf{N} ; \notin \mathbf{Z} \end{cases}$

6) $\dfrac{-\,75'9}{25'3} = -\,3 \rightarrow \notin \mathbf{N} ; \in \mathbf{Z}$

Ejercicios para hacer :

7) 0'45	8) – 307
9) + 1450	10) 23'452
11) 13 : 8 =	12) – 306
13) 5	14) 0'4
15) 2	16) 9
17) – 15	18) + 7803
19) 0'8 / 0'2 =	20) 18'5...
21) + 37	22) – 18
23) + 203'5	24) – 0'45
25) 36 : 4 =	26) 12 : 3 =
27) – 3248	28) + 5006163
29) 3/10 =	30) – 15/5 =
31) + 0'25 : 0'05 =	32) – 108
33) 7	34) 2'236...
35) – 30/5 =	36) + 0'7
37) – 0'135	38) – 2'4/0'8 =
39) 15	40) – 87104
41) + 63'2	42) – 3'5/– 0'5 = (¡)

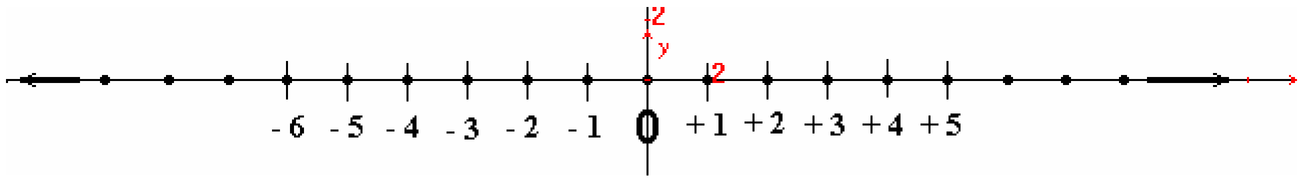
A continuación nos familiarizamos más con los números enteros, sabiendo expresar con ellos **situaciones diversas** (ejercicios impares) y, también, pensando libremente situaciones que expresen los números indicados (ejercicios pares). Fíjate bien en los resueltos (hasta el nº 51) y realiza tú los demás.

42) El año 504 antes de Cristo → – 504
43) + 35 → Gané un premio de 35 millones.
44) El coche de Juan recorrió 120 km en sentido positivo → + 120
45) – 5 → La temperatura de ayer fue de 5º bajo cero.
46) Estoy sin "blanca" → 0 **€**.
47) + 5000 → El avión volaba a 5 km por encima del nivel del mar.
48) El tiburón se sumergió 10 metros → – 10 m.
49) – 12.500 **€** → Julia ha pedido un préstamo al Banco de 12.500 euros.
50) Thales de Mileto, sabio griego, nació el año 624 a. de C. → – 624
51) 500 → Mi abuelo me dio 500 euros para la ayuda en la compra de un ordenador.
52) El año 10 antes de Cristo.
53) + 67.000.
54) Ana Belén ha pagado a Cristina 35 euros.
55) – 3.
56) La temperatura aumentó 6º esta semana.
57) + 580.
58) Villafranca está situada a una altitud media de 400 metros.
59) + 1999.
60) Félix se ha gastado1450 euros en una moto.
61) – 45.000.000.
62) El año en que nació Jesucristo.
63) + 13.
64) El año actual.
65) – 195.000.
66) Los diez primeros números positivos.
67) 0.
68) Teodoro jugó al Bingo y perdió 120 euros.
69) + 112.
70) Los diez primeros números negativos.
71) – 6790.
72) La fosa marina está a 7.200 metros.
73) – 7.
74) Cinco números negativos mayores que – 9.
75) Seis números mayores que – 3.
76) Intercala números ordenados entre – 5 y + 5.
77) Situación imposible de expresar con un número entero.

1.2.- Representación gráfica de números enteros.

Los números enteros se representan **en una línea recta**, llamada recta entera.

Se coloca en el medio el **cero** (0), llamado **origen**, y a continuación, tomando una medida (segmento) adecuada (de uno, dos o tres cuadritos de tu cuaderno, según te convenga), se señalan ordenados sobre la recta con una pequeña rayita y/o un punto los primeros números enteros **positivos (a la derecha ☞) y negativos (a la izquierda ☜)**. Entre cualesquiera dos números enteros consecutivos, la **distancia** entre ellos debe ser **igual**, aunque tú puedes elegir la medida (0'5 cm, 1 cm, 1'5 cm, 2 cm, etc.)



1.3.- Valor absoluto de un número entero.

El valor absoluto de un número entero es **el número que resulta al quitarle el signo**.

Se acostumbra a expresar el valor absoluto de un entero entre dos barras. Veamos ejemplos:

$|+7|$ → Se lee → "Valor absoluto de + 7" = **7**

$|-7|$ → Se lee → "Valor absoluto de − 7" = **7**

Como puedes observar, los números enteros + 7 y − 7 tienen el mismo valor absoluto. O sea, cada par de números situados a la misma distancia de 0 en uno y otro lado de la recta entera tienen el mismo valor absoluto.

$\lvert +3 \rvert = 3$	$\lvert -8 \rvert = 8$	$\lvert +12 \rvert = 12$
$\lvert -47 \rvert = 47$	$\lvert +60 \rvert = 60$	$\lvert -60 \rvert = 60$
$\lvert +408 \rvert = 408$	$\lvert -659 \rvert = 659$	$\lvert \pm n^o \rvert = n^o$

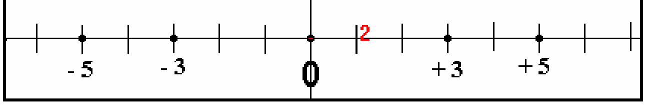
1.4. - Opuesto de un número entero.

El número opuesto a un número entero es **otro número entero con el mismo valor absoluto pero de signo contrario**.

Como hemos visto en la pregunta anterior, los números enteros que son opuestos están situados a la misma distancia del **0,** y a uno y otro lado de la recta entera, es decir, son simétricos respecto del origen.

Las parejas de números + 4 y – 4, – 11 y + 11, + 35 y – 35, – 308 y + 308, etc., son pares de números opuestos, o simétricos respecto del 0, y los de cada pareja tienen el mismo valor absoluto.

El número entero + 3 es simétrico, respecto del 0, del entero - 3, o viceversa. También, el opuesto del entero - 5 es el entero + 5, o viceversa.



1.5.-Ordenación (comparación) de números enteros.

En primer lugar, recuerda que ordenar en sentido **creciente** quiere decir **de menor a mayor**, y en sentido **decreciente de mayor a menor**.

Sentido creciente → ? (menor) < ? < ? < ? (mayor)

Sentido decreciente → ? (mayor) > ? > ? > ? (menor)

La situación monetaria de un grupo de amigos en un fin de semana es la siguiente.

- Feliciana dispone de 12 €.
- Crispino está sin "blanca", pero no le debe nada a nadie.
- Heriberto debe 15 € a un amigo.
- Romualda tiene 8 €.
- Paulino debe 6 € a su hermano.

¿Quién tiene más dinero y quién menos? A ver, ordena tú mentalmente la situación en forma creciente sin mirar la página siguiente.

Bien, pues la ordenación sería así:

Tiene más dinero **Feliciana**, después **Romualda**, le sigue **Crispino** *–ni tiene ni debe, y aunque no tiene nada, o sea, posee* ***0*** *euros, pero tiene más que los que deben–*, a continuación va **Paulino** *–deber 6 es tener más (mayor) que deber 15–* y, por último, el que menos tiene, lógicamente, es el más debe, es decir, **Heriberto**.

Lo expresaríamos así, en forma **creciente**:

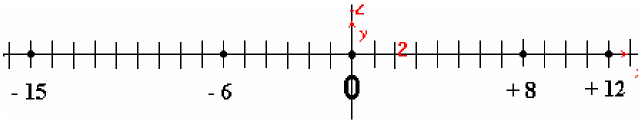
$$-15 < -6 < 0 < +8 < +12$$

O así, en forma **decreciente**:

$$+12 > +8 > 0 > -6 > -15$$

¡ OJO ! No confundas los signos "menor que (<)" y "mayor que (>)".

Y así en la recta entera:



Las normas para hacer una ordenación de enteros son:

- Todos los números enteros positivos son mayores que el 0.
- Entre los positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.
- Todos los números enteros negativos son menores que el 0.
- Entre los números enteros negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.
- En la representación de enteros en una recta, un número es mayor que otro si está situado más a la derecha, y viceversa.

En los siguientes ejercicios, realiza lo que se indica:

a) Valores absolutos de dichos números.
b) Ordenación (creciente y decreciente), colocando el signo correspondiente.
c) Representación gráfica en una recta entera.

1) $+5, \ -2, \ 0, \ -8$ y $+9$.

Éste lo vamos a resolver,
para que veas cómo debes hacer los demás.

a) Valores absolutos:

$\lvert +5 \rvert = 5$	$\lvert -2 \rvert = 2$	$\lvert 0 \rvert = 0$
$\lvert -8 \rvert = 8$	$\lvert +9 \rvert = 9$	

b) Ordenación:

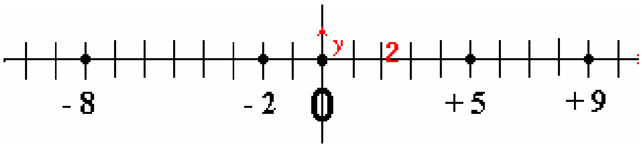
creciente

$$-8 < -2 < 0 < +5 < +9$$

decreciente

$$+9 > +5 > 0 > -2 > -8$$

c) Representación gráfica.



2) $-12, \ +10, \ -1, \ 0$ y 2.
3) $+1, \ 0, \ -10, \ -1$ y -5.
4) $+2, \ -7, \ -11, \ 0, \ 9$ y -3.
5) $-13, \ +4, \ 12, \ 0$ y -4.
6) $-5, \ 0, \ +6, \ -8, \ -6$ y $+1$.
7) $+8, \ -6, \ -1, \ +3$ y 0.
8) $+4, \ -4, \ 0, \ 8, \ -8$ y $+2$.
9) $+14, \ +7, \ 0, -7$ y -2.
10) $-9, \ 3, \ 0, \ +9, \ -3$ y $+5$.

Si un número entero no va precedido de ningún signo, entonces entendemos siempre que es positivo, es decir, que tiene un signo +, aunque no se le ponga. Sin embargo, todos los números negativos deben llevar siempre su signo –.

hhhhhhhhhhhhhhhhhhhhhhhh

En los **programas educativos actuales** (siglo XXI: avances de muy diverso tipo…) podemos señalar como "**lagunas**", entendidas éstas como aspectos significativos que echamos en falta, por ejemplo la que comentamos en esta reflexión: lo que bien podríamos llamar **Escuela de Espalda**. Es indudable que hay que enseñar Lengua, Matemáticas, Idioma, Educación Física, etc. Pero quizás convendría "muy mucho" enseñar, además, **Higiene Postural**, porque quien no le dé importancia a la forma de sentarse, a la educación de las posturas, a los consejos para no ir desgastando cada año más las vértebras, etc., es que todavía no le ha llegado la hora de convivir con molestias cervicales, dorsales o lumbares.

Corregir los vicios posturales de los alumnos debería ser labor diaria de padres y profesores, y aun así es muy difícil corregirlos. Si desde bien pequeñitos los educamos en sus posturas, mantenemos la vigilancia continuamente y no cedemos ante la monotonía de las constantes llamadas de atención, estaremos dándoles mayor calidad de vida en el futuro, e incluso ahorraremos tiempo y dinero a la Sanidad Española. Pero **si no lo hacemos de ninguna manera, o sólo de "higos a breva", estaremos "colaborando" a una peor calidad de vida futura de nuestros hijos y/o alumnos**.

hhhhhhhhhhhhhhhhhhhhhhhh

EJERCICIOS

1.- ¿Sabes algún número que sea natural y no pertenezca a los números enteros? (¡).

2.- En una gran ciudad, donde tantos timos se suelen dar, pasó un día lo siguiente:

La señora Listilla llevó monedas para venderlas en un anticuario (tienda dedicada a la compra-venta de monedas, billetes y cosas antiguas). Durante un rato, en el que estuvo mostrando toda la mercancía, sacó su moneda preferida la señora y le dijo al señor Espabilado, dueño de la tienda, *"Aquí tengo una moneda muy antigua, pero no se la vendo por menos de 6.000 euros. Mírela; tiene una inscripción que la remonta a una época antes del nacimiento de Jesucristo, porque pone año 200 a. de C. Ya ve que es muy antigua".* Ipso facto –seguramente no sabes el significado; pues búscalo donde se rastrean las palabras que no conocemos, ya que esa enriquecedora costumbre se va perdiendo poco a poco, desgraciadamente. El léxico, *otra palabra a buscar,* de muchos jovencitos de hoy deja bastante que desear, así que amplíalo algo- el señor Espabilado la despidió sin hacerle más caso.

¿Sabes explicar qué descubrió el dueño para actuar de esa forma?

3.- Escribe ordenadamente cinco números enteros que sean menores que + 3, colocando el signo correspondiente.

4.- Escribe ordenadamente cinco números enteros que sean mayores que – 2, con el signo adecuado.

5.- Clasifica los números siguientes según sean naturales, enteros, ambos o nada.

Ejemplos :
$$\begin{cases} +7 \rightarrow \in \mathbb{N} \ ; \in \mathbb{Z} \\ -13 \rightarrow \notin \mathbb{N} \ ; \in \mathbb{Z} \\ +6'5 \rightarrow \notin \mathbb{N} \ ; \notin \mathbb{Z} \\ -0'8 \rightarrow \notin \mathbb{N} \ ; \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) – 5	b) – 10	c) + 2	d) 0
e) 9	f) – 2	g) + 8	h) 0'45
i) – 2'3	j) – 0'5	k) 10 : 3	l) + 0 / 7
m) 20 : 4	n) – 705'1	ñ) – 8 : 2	o) –2'4/– 0'6

6.- Coloca el signo correspondiente entre cada par de números indicados en cada apartado.

Ejemplos → 0 > – 6 ; – 9 < – 1

a) + 3 __ – 2	b) – 1 __ + 4	c) 0 __ + 2
d) – 7 __ – 10	e) – 8 __ 7	f) – 5 __ 0
g) + 6 __ + 8	h) – 6 __ + 8	i) 0 __ + 10
j) + 15 __ +1	k) + 7 __ – 1	l) – 6 __ – 5

7.- Halla los valores absolutos de los números indicados en cada apartado, después los ordenas en forma decreciente y, por último, los representas gráficamente en una recta entera.

a) – 7, + 2, – 1, 0 y + 10.
b) + 11, – 5, – 7, + 4, – 11, + 5 y 0.
c) 0, – 3, + 9, + 3, – 9 y – 1.
d) – 13, + 4, 12, 0 y – 4.
e) + 7, – 6, 0, + 2, – 5 y – 7.

8.- Intercala diez números enteros que cumplan la condición expresada:

– 6 < ………………………………… < + 5

9.- Escribe tres pares de números enteros que tengan, cada pareja, el mismo valor absoluto.

10.- Responde:

a) ¿Cuál es el número positivo mayor que existe? (¡)
b) ¿Cuál es el número positivo menor que existe?
c) ¿Cuál es el número negativo mayor que existe?
d) ¿Cuál es el número negativo menor que existe? (¡)

11.- Representa en una recta entera dos números positivos y otros dos negativos que se encuentren a la misma distancia del origen. Después los ordenas en forma decreciente.

12.- Responde:

a) Escribe un número negativo que sea mayor que un positivo. (¡)
b) ¿Qué número entero que no sea positivo es mayor que todos los negativos?
c) Escribe tres números enteros que no sean naturales, después uno que no sea entero y si sea natural, otros tres que no sean naturales ni enteros y otros tres que sean naturales y enteros. (¡)
d) ¿De una operación con decimales puede obtenerse un número entero? Explica tu respuesta.

Es muy habitual el deseo de los padres de querer que nuestros hijos sean los mejores en esto, o en eso, o en lo otro. Sin duda es una aspiración muy humana. Sin embargo, me gustaría que tanto vosotros los alumnos como vuestros padres, si leen esta reflexión, dedicasen algunos minutos a pensar sobre lo siguiente:

Debemos educar a los niños no para que sean los mejores, sino para que sean mejores cada día.

1.6.- Suma de números enteros.

Es muy conveniente que hasta tanto no domines bien las operaciones con enteros coloques siempre éstos entre paréntesis y con su signo, o sea, **(+ 4), (– 6),** etc., y precedidos, además, del signo de la operación correspondiente **(sumar '+', o restar '–'),** o sea:

(+ 7) + (– 6) + (+ 9) = ...

Al sumar números enteros se pueden dar estos casos:

☞ Suma de enteros positivos.

Se suman los valores absolutos y se pone el signo '+'.

Ejemplos:

1) (+ 1) + (+ 6) = (+ 7) = ***7***

2) (+ 3) + (+ 9) + (+ 48) = (+ 60) = ***60***

3) (+ 5) + (+ 10) = ?

4) (+ 4) + (+ 2) + (+ 20) = ?

5) (+ 8) + (+ 1) + (+ 17) + (+ 4) = ?

6) (+ 7) + (+ 6) + (+ 1) = ?

☞ Suma de enteros negativos.

Se suman los valores absolutos y se pone el signo '–'.

Ejemplos:

7) (– 2) + (– 9) = (– 11) = ***– 11***

8) (– 1) + (– 6) + (– 27) = (– 34) = ***– 34***

9) (– 3) + (– 5) = ?

10) (– 6) + (– 8) + (– 3) = ?

11) (– 9) + (– 4) + (– 7) + (– 5) = ?

12) (– 13) + (– 5) + (– 2) + (– 7) + (– 1) = ?

☞ Suma de entero positivo y negativo, o viceversa.

Se restan los valores absolutos de ambos números y al resultado se le pone el signo del que tiene mayor valor absoluto.

Ejemplos:

13) (+ 9) + (– 2) = (+ 7) = ***7***

14) (+ 1) + (– 5) = (– 4) = ***– 4***

15) (– 3) + (+ 5) = (+ 2) = ***2***

16) (– 6) + (+ 6) = ***0***

17) (+ 3) + (– 4) = (– 1) = ***– 1***

18) (+ 4) + (– 7) = ?

19) (+ 23) + (– 12) = ?

20) (– 8) + (+ 8) = ?

21) (– 2) + (+ 9) = ?

22) (+ 1) + (– 5) = ?

☞ Suma de enteros positivos y negativos.

Se suman por un lado los valores absolutos de los positivos, por otro los valores absolutos de los negativos, se restan estos resultados y se pone el signo de resultado que tiene mayor valor absoluto.

Ejemplos:

23) (+ 2) + (– 7) + (– 1) + (+ 4) =
= (+ 6) + (– 8) = (– 2) = ***– 2***

24) (– 7) + (– 2) + (+ 3) + (– 1) + (– 9) =
= (+ 3) + (– 19) = (– 16) = ***– 16***

25) (+ 5) + (+ 6) + (– 13) + 0 + (+ 2) =
= (+ 13) + (– 13) = ***0***

26) (+ 5) + (– 7) + (– 1) + (– 6) + (+ 2) = ?

27) (– 4) + (+ 8) + (+ 3) + (– 5) = ?

28) (+3) + (– 2) + 0 + (– 5) + (+ 9) + (– 8) = ?

29) (–1) + (– 7) + (+ 4) + (– 3) + (+ 2) + (+5) = ?

30) (+ 10) + (– 3) + (+ 4) + (– 2) = ?

31) (+ 4) + (+ 2) + (– 7) + (+ 3) + (– 2) =?

32) (– 8) + (– 1) + (+ 5) + (+ 1) + (– 7) + (+ 6) = ?

33) (+ 7) + (– 2) + (– 8) + (+ 14) = ?

34) (– 4) + (– 5) + (+ 9) + (+ 1) + (– 6) = ?

35) (– 2) + (– 6) + (+ 1) + (+ 3) + (– 5) + (+9) = ?

36) (– 43) + (– 7) + (+ 17) + (+ 8) + (– 30) = ?

37) (– 2) + (– 3) + (+ 15) + (+ 8) = ?

38) (+ 3) + (– 10) + (+ 20) + (+ 7) + (– 5) = ?

39) (– 8) + (– 9) + (+ 11) + (+ 5) + (– 3) = ?

1.7.- Propiedades de la suma de enteros.

a) **Propiedad conmutativa.**

El resultado de la suma de enteros no depende del orden en que se sumen.

1) $\left\{\begin{array}{l}(+2)+(-6)=-4\\(-6)+(+2)=-4\end{array}\right\}$

2) $\left\{\begin{array}{l}(-5)+(+8)=\ ?\\(+8)+(-5)=\ ?\end{array}\right\}$

3) $\left\{\begin{array}{l}(+7)+(-7)=\ ?\\(-7)+(+7)=\ ?\end{array}\right\}$

4) $\left\{\begin{array}{l}(-1)+(+9)=\ ?\\(+9)+(-1)=\ ?\end{array}\right\}$

b) **Propiedad asociativa.**

Al sumar enteros, la forma de asociarlos no altera el resultado.

5) $\left\{\begin{array}{l}(+2)+[(-6)+(-1)]=(+2)+(-7)=-5\\ [(+2)+(-6)]+(-1)=(-4)+(-1)=-5\end{array}\right\}$

6) $\left\{\begin{array}{l}(-3)+[(-7)+(-2)]=\ ?\\ [(-3)+(-7)]+(-2)=\ ?\end{array}\right\}$

7) $\left\{\begin{array}{l}(+4)+[(-8)+(+5)]=\ ?\\ [(+4)+(-8)]+(+5)=\ ?\end{array}\right\}$

c) **Propiedad elemento neutro.**

El número entero cero (0) es el elemento neutro de la suma, porque al sumar a cualquier número el cero se obtiene ese mismo número. *(Habrás oído más de una vez hablar de algún árbitro en un deporte diciendo de él que es neutral, porque no favorece a ningún equipo; pues de ahí el nombre de elemento neutro, porque ni añade –suma- ni quita –resta- al número que se le suma)*

8) $(+5)+0=5$
9) $(-4)+0=\ ?$
10) $0+(-12)=\ ?$

d) **Propiedad elemento opuesto.**

Se llama opuesto de un número entero a otro entero que tiene el mismo valor absoluto pero distinto signo.

11) $\left\{\begin{array}{l}+12 \rightarrow \text{su opuesto es } -12.\\(+12)+(-12)=0\ \text{(elemento neutro)}\\ \text{un entero + su opuesto = elemento neutro}\end{array}\right.$

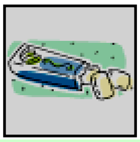
12) $\left\{\begin{array}{l}\text{Rellena tú esta llave en tu cuaderno.}\\-7\ \rightarrow\end{array}\right.$

1.8.- Resta de números enteros.

Para restar dos números enteros, se suma al minuendo (primer entero) el opuesto del sustraendo (segundo entero). O lo que es lo mismo, la resta se convierte en una suma del entero opuesto. Veamos algunos ejemplos:

13) $(+9)-(+5)=(+9)+(-5)=+4=4$
14) $(+7)-(-8)=(+7)+(+8)=+15=15$
15) $(+2)-(+6)=(+2)+(-6)=-4$
16) $(-1)-(-4)=(-1)+(+4)=+3=3$
17) $(-8)-(+5)=(-8)+(-5)=-13$
18) $(-6)-(-5)=(-6)+(+5)=-1$
19) $(+2)-(+4)-(-6)=(+2)+(-4)+(+6)=$
$=(+8)+(-4)=+4=4$
20) $(-3)-(+7)-(+1)=(-3)+(-7)+(-1)=$
$=-11$
21) $(+5)-(-2)-(-8)=(+5)+(+2)+(+8)=$
$=+15=15$
22) $(-2)-(+9)-(-3)=(-2)+(-9)+(+3)=$
$=(+3)+(-11)=-8$
23) $(+1)-(-7)=\ ?$
24) $(+11)-(+7)=\ ?$
25) $(+3)-(+9)=\ ?$
26) $(-4)-(-8)=\ ?$
27) $(-5)-(+2)=\ ?$
28) $(-9)-(-1)=\ ?$
29) $(+3)-(+5)-(-7)=\ ?$
30) $(-5)-(+9)-(+3)=\ ?$

Conversación de un grupo de amigos, quizás un poco "raros" para la época actual:



FEDERICO: *"Creo que nos cuesta muy poco trabajo tirar el chicle en una papelera, o si no hay alguna cerca arrugarlo en un papel para tirarlo después, y así no quedamos sucio el suelo o el lugar donde lo íbamos a tirar".*

CIPRIANO: *"Pues hay otros hábitos mucho peores que tienen algunos, como orinar en las calles, plazas o parques cuando se 'caldean' o quieren llamar la atención".*

INÉS: *"Estoy de acuerdo con todo lo que decís, pero todavía es más insano y grosero orinar en las piscinas, y hay gente que tiene la desfachatez de hacerlo, ayudándose de que su acto asqueroso e impúdico pasa inadvertido".*

VÍCTOR: *"Hay veces que pienso que la educación ciudadana en lugar de ir a mejor va a peor, porque cada dos por tres te encuentras por las calles, papeles, cascos vacíos y otras cosas todavía más indeseables".*

¿ Cosas raras, o urbanidad, buenos modales, buenas costumbres y buena educación ?

1.9.– Sumas y restas gráficas en la recta entera.

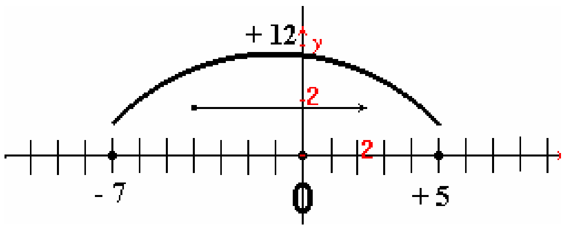
Si aprendes a sumar y restar enteros en una recta graduada entera, probablemente comprenderás mejor estas operaciones y, evidentemente, las dominarás antes. Veamos algunas reglas para ello:

- Te sitúas en la recta en el punto que indique el primero de los números enteros.
- Si sumas un entero positivo, te desplazas a la derecha esas unidades que indique dicho número, el 2º, el que sumas, y el punto donde llegues es el resultado.
- Si sumas un entero negativo, te desplazas a la izquierda lo que indique ese negativo, el 2º número, y el punto donde llegues es el resultado.
- Si hay una resta, antes haces la suma del opuesto y después ya te desplazas a derecha o izquierda según sea el opuesto hallado.

EJEMPLO Nº 1

Resolución numérica :
$(-7) + (+12) = +5$

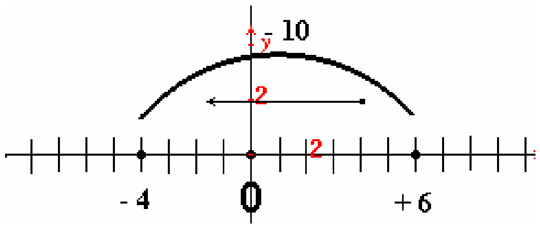
Resolución gráfica :



EJEMPLO Nº 2

Resolución numérica :
$(+6) + (-10) = -4$

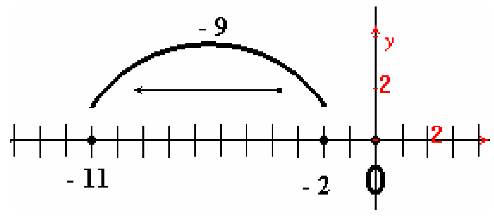
Resolución gráfica :



EJEMPLO Nº 3

Resolución numérica :
$(-2) + (-9) = -11$

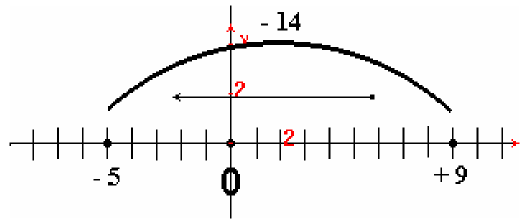
Resolución gráfica :



EJEMPLO Nº 4

Resolución numérica :
$(+9) - (+14) = (+9) + (-14) = -5$

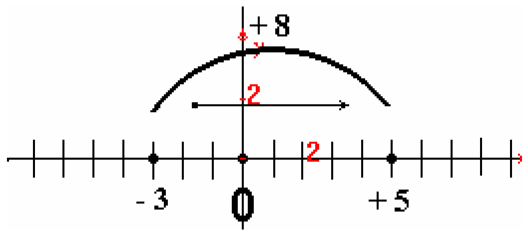
Resolución gráfica :



EJEMPLO Nº 5

Resolución numérica :
$(-3) - (-8) = (-3) + (+8) = +5$

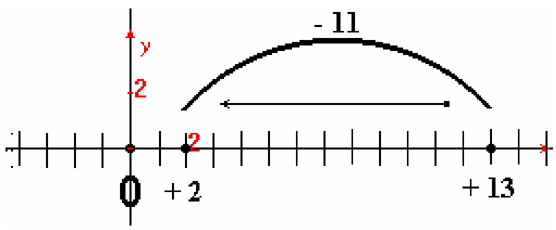
Resolución gráfica :



EJEMPLO Nº 6

Resolución numérica :
$(+13) - (+11) = (+13) + (-11) = +2$

Resolución gráfica :



Realiza tú los siguientes ejercicios de forma numérica y de forma gráfica, fijándote en los anteriores, pero haciendo las rectas con regla y bien las divisiones.

1)	(+ 5) + (+ 6) =
2)	(+ 9) + (– 4) =
3)	(– 10) + (+ 2) =
4)	(– 7) – (+ 4) =
5)	(– 3) – (– 15) =
6)	(+ 6) – (+ 10) =

1.10.– Sumas y restas combinadas.

Aunque quizás ya hay alumnos *–me refiero a los de 1º, porque se supone que en 2º ya dominan bastante bien todo esto–* que sepan efectuar estas operaciones de enteros de forma más simplificada, es decir, más práctica y rápida, seguimos todavía manteniendo la escritura de enteros con tantos paréntesis y signos de sumar y/o restar entre ellos. Por supuesto, aquellos que ya sabéis hacerlo sin tantos paréntesis y de forma más reducida y práctica podéis y debéis hacerlo todo más abreviado.

Hasta tanto no domines la escritura simplificada, es muy conveniente que sigas los siguientes pasos:

1º) Se transforman todas las restas en sumas de los opuestos.
2º) Se suman los valores absolutos de los enteros positivos.
3º) Se suman los valores absolutos de los enteros negativos.
4º) Se restan los resultados obtenidos y se pone el signo del que tenga mayor valor absoluto.

Veamos algunos ejemplos:

7) (– 3) + (– 1) – (– 7) + (+ 2) =
= (–3) + (–1) + (+7) + (+2) = (+9) + (–4) = ***5***
8) (– 4) – (– 6) + 0 – (+ 1) + (– 8) =
= (– 4) + (+ 6) + (– 1) + (– 8) = (+ 6) + (–13) = ***– 7***
9) – (+ 3) + (– 5) – (+ 4) – (– 1) + (+ 2) – (–9) =
= + (– 3) + (– 5) + (– 4) + (+ 1) + (+ 2) + (+9) =
= (+ 12) + (– 12) = ***0***
10) (– 7) + (– 3) – (– 1) + (– 5) =
11) – (– 1) + (+ 4) – (– 9) – (+ 6) – (+ 5) + (–7) =
12) (+ 6) – (– 2) – (+ 1) + (– 10) =
13) – (+ 3) + (– 4) – (– 5) – (– 1) – (+ 7) – (+2) =
14) (+ 2) – (– 8) – (+ 3) + (– 1) =
15) – (– 8) – (+ 1) – (– 2) + (+ 3) – (+ 1) + (–20) =
16) (+ 5) + (– 4) – (– 6) + (– 7) =
17) – (+ 4) – (+ 1) + (– 1) – (– 3) + (+ 2) + (–6) =
18) (– 1) + (– 5) – (– 2) + (+ 4) – (+ 9) =

1.11.– Escritura abreviada de las sumas y restas de números enteros.

Hasta ahora hemos expresado las operaciones de enteros colocando éstos entre paréntesis con sus signos *(los positivos con + y los negativos con –)* y entre cada paréntesis el signo correspondiente de la operación *(sumar: +, o restar: –)*. Pues ahora ya debemos ir poco a poco familiarizándonos cada día más con lo que se llama **escritura simplificada** de operaciones de enteros, que al principio te resultará algo más confuso y difícil pero que a medio plazo te ayudará a realizar todo de forma más reducida, rápida y práctica. En realidad se trata de no tener que escribir tantos signos y tantos paréntesis, sino sólo los necesarios e imprescindibles.

Bien, pues veamos las normas:

+ (+ 7) → (escritura simplificada) → + 7
+ (– 7) → (escritura simplificada) → – 7
– (+ 7) → (escritura simplificada) → – 7
– (– 7) → (escritura simplificada) → + 7

Ahora apliquémoslas en algunos ejemplos:

19) (+ 4) + (– 8) – (+ 1) – (– 2) =
↓ ↓ ↓ ↓
= 4 – 8 – 1 + 2 = 6 – 9 = ***– 3***
20) – (– 5) + (+ 7) – (+ 9) + (– 3) – (– 6) =
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
= + 5 + 7 – 9 – 3 + 6 =
= 18 – 12 = ***6***
21) – (+ 1) + (– 3) – (– 6) + (+ 7) = ?
22) (+ 4) – (+5) + (– 2) – (– 1) + (+ 8) = ?
23) – (– 5) + (+6) – (– 1) + (– 15) + (+ 2) = ?
24) (+ 3) + (+4) – (– 14) + (– 7) – (+ 9) = ?
25) (– 8) – (+2) + (– 3) – (– 4) + (+ 1) = ?
26) – (+ 12) + (–6) – (+ 8) + (+ 3) – (– 18) = ?
27) + 5 – 3 + 1 – 6 – 4 + 7 = ?
28) + 4 + 1 + 7 + 9 =
29) – 12 – 2 – 29 – 1 – 7 – 9 = ?
30) (– 25) + (– 12) – (– 8) – (+ 5) = ?

¡**OJO**! **No es correcto quedar dos signos seguidos sin poner un paréntesis entre ellos para separarlos.**

1.12.–Operaciones de enteros en las que hay paréntesis y/o corchetes.

Siempre que en una expresión aparezcan paréntesis y/o corchetes, se debe proceder así:

1) Suprimir primero los paréntesis, teniendo en cuenta que si tienen delante un signo '+' todo lo del interior sigue igual, y si tiene delante un signo '–' hay que cambiar de signo a los números de dentro del paréntesis.

2) Hacer lo mismo con los corchetes que queden.

También, para efectuar estas operaciones se puede proceder haciendo en primer lugar las operaciones de cada paréntesis y luego las que queden en el/los corchete/s. En realidad, creo que **es mejor y más rápido esta 2ª forma** que va resolviendo los paréntesis y los corchetes sin necesidad de ir "arrastrando" tantos números hasta el final de cada ejercicio. **Sin embargo**, por experiencia sé que al principio una mayoría de alumnos lo aprende mejor y se equivoca menos eliminando paréntesis y corchetes y después operando todos los números. En fin, tú hazlo como mejor te resulte.

Veamos algunos ejemplos:

1) $-[-3+(-5+2)+1-(7+6-11)] =$

a) Lo hacemos elimando paréntesis y corchetes :

$= -[-3-5+2+1-7-6+11] =$

$= +3+5-2-1+7+6-11 = 21-14 = 7$

b) Y ahora resolviendo paréntesis y corchetes:

$= -[-3-3+1-2] = +7$

No hemos mencionado las llaves $\rightarrow \{\ [\ (\ )\ ]\ \}$, **porque suelen utilizarse poco, al menos en estos cursos. Las llaves se usan cuando hay que englobar expresiones que ya tienen paréntesis y corchetes, y son las últimas en operarse.**

Es decir,
- 1º → Los paréntesis
- 2º → Los corchetes
- 3º → Las llaves

Veamos un ejemplo:

2) $-5-\{6-[-1+(3-10)+2-(7-8)-2]\} =$

a) Lo hacemos eliminando paréntesis, corchetes y llaves:

$= -5-\{6-[-1+3-10+2-7+8-2]\} =$

$= -5-\{6+1-3+10-2+7-8+2\} =$

$= -5-6-1+3-10+2-7+8-2 =$

$= 13-31 = -18$

b) Ahora resolviendo paréntesis, corchetes y llaves:

$= -5-\{6-[-1-7+2+1-2]\} =$

$= -5-\{6+7\} = -5-13 = -18$

3) $-11+[4-(3+8)]-[9+(-2+6)-7] =$

a) Eliminando paréntesis y corchetes:

$= -11+[4-3-8]-[9-2+6-7] =$

$= -11+4-3-8-9+2-6+7 =$

$= 13-37 = -24$

b) Resolviendo paréntesis y corchetes, quedando igual el resultado si van precedidos de un signo + y cambiando el signo si tiene delante un –.

$= -11+[4-11]-[9+4-7] =$

$= -11-7-6 = -24$

4) $-(8-3)+(-1+5-2)-(9+10) =$

5) $6-[4-(3+1-8)+2+(-8+4)]-5 =$

6) $-5-(4+3-2)+[-2+(4-1-5)]-8 =$

7) $-(2-1+8)-[-5-(2-3)+4]+1 =$

8) $10-[4-5-(2+3-1)+(5-6)-1+2]-(5-2) =$

9) $-3-\{4+[-5+8-(7+1-3)+2]-10\} =$

10) $9-[7-(3+6)+(5-11)+1]-(2-8) =$

11) $+1-[(2-3)-5+(4-7)+2]-(3-4) =$

12) $-3-\{5+[-2-(7+1-9)+1]-6\}+8 =$

13) $+7+(-5+1)-\{2-[3-(9-2)+10]+4\}-(+2) =$

14) $-8+(5+3-10)-(-9+4-1)-(-7) =$

EJERCICIOS DE REPASO

1.- Si en uno de los muchos (i) libros que lees a lo largo del año pone lo siguiente: *"La batalla tuvo lugar el año –348 ..."*, ¿qué quiere decir?

2.- ¿Cuál es el origen de las situaciones en las que se habla de temperaturas?

3.- ¿Sabes con qué letra se representa al conjunto de los números naturales? ¿Y a los enteros?

4.- Escribe dos números que tengan el mismo valor absoluto. ¿Te atreves con tres enteros que tengan el mismo valor absoluto? (i)

5.- Cuando dibujas la recta numérica entera para representar números, ¿cómo tienes que hacer las divisiones?

6.- ¿Cuáles son las propiedades de la suma de enteros? Pon un ejemplo de cada una de ellas.

7.- En éste, además de la nota normal, doy alguna "cosecha" para el próximo control al que le toque corregirlo y lo sepa. ¿Es posible restar dos enteros negativos y obtener un entero positivo? No vale decir solamente sí o no; es necesario poner algún ejemplo.

8.- Escribe las equivalencias fundamentales de la resta.

9.- Sustituye los signos de interrogación por números enteros para que el resultado sea el expresado, pero cumpliendo las condiciones pedidas.

$$-\,?\,-\left[+\,?\,+\left(?-?\right)-\,?\,\right]+\,?\,-\left(?\,+\,?\,-\,?\right)=-20$$

Condiciones: debe haber un número mayor de 20, dos mayores de 10 y menores de 20 y los demás que sean todos menores de 10. ¡Ah! Y no repetir ninguno.

10.- Clasifica estos números según sean naturales, enteros, no naturales o no enteros. Coloca el símbolo adecuado.

Ejemplos: $\begin{cases} 6 \rightarrow \in \mathrm{N}, \in \mathrm{Z} \\ \dfrac{-10}{5} = -2'5 \rightarrow \notin \mathrm{N}, \notin \mathrm{Z} \end{cases}$

a) 35 b) − 20 c) 8'73 d) 0 e) − 377
f) −0'38 g) 10/2 h) 2'15/1'5 i) + 2 j) − 35/7
k) −14'4:12 l) −2309 m) 23 n) − 5'6 ñ) + 0'4

11.- Representa gráficamente en una recta entera los números de los apartados de cada fila. Lo haces con las divisiones y los puntitos en la recta, y debajo ordenados en forma creciente y decreciente colocando los signos adecuados entre los números. Señala también cuál es el que tiene mayor valor absoluto y cuál menos.

a) − 2	b) 9	c) + 5	d) 0	e) − 7
f) 0	g) − 1	h) 4	i) + 10	j) − 11
k) + 6	l) 0	m) − 2	n) − 8	ñ) + 10

12.- Realiza estas sumas y restas:

a) (+3) + (+ 5) =	b) (+ 4) + (− 7) =
c) (+ 9) + (− 3) =	d) (− 7) + (+ 10) =
e) (− 2) − (+6) =	f) (−4) − (− 11) =
g) (+ 8) − (+ 3) =	h) (+ 7) − (+ 12) =
i) (+ 2) + (− 6) =	j) (− 3) + (− 8) =
k) (+ 7) + (− 10) =	l) (+4) − (− 5) =
m) (− 2) − (− 8) =	n) (+8) − (+ 15) =
ñ) (− 1) − (+ 15) =	o) (− 3) − (− 6) =
p) (+ 6) + (− 6) =	q) (− 2) − (− 2) =
r) (− 5) − (− 4) =	s) (+ 1) + (− 7) =

13.- Ahora resuelve sin prisas estas sumas y restas combinadas.

a) (− 1) + (+ 4) − (− 2) − (+ 7) + (− 15) =
b) (+ 4) − (− 5) + (− 8) − (+ 1) =
c) (− 7) + (− 3) − (− 9) + (+ 2) − (− 4) =
d) (+ 3) − (− 5) + (+ 1) − (+ 6) + (− 1) =
e) − (+ 2) + (− 6) − (+ 1) − (− 4) + (+3) =

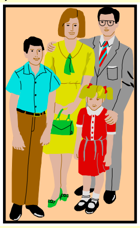
14.- Paréntesis y corchetes:

a) $-3-\left[4+(1-8)-6\right]-(+7-2+1)=$
b) $-\left[5+2-(9+2)-1\right]+4=$
c) $6-\left\{1-5-\left[8+(4-7)-2\right]+3\right\}-9=$
d) $-(4+7-2)-6+(5-3+1)=$
e) $5-\left[8+1-(-3+7)+(2-9)\right]-6=$

15.- Durante bastantes días, al hacer las operaciones, hemos escrito los números enteros con paréntesis y dentro de ellos su signo (positivo o negativo). Resuelve los siguientes ejercicios de forma simplificada, como se explica en la pregunta 1.11.

a) − (+ 8) + (− 3) − (− 1) − (+ 6) − (− 10) =
b) (− 2) − (+ 7) − (− 4) + (+ 8) =
c) − (+ 3) + (+ 2) − (+ 7) − (+ 2) − (− 5) =
d) (+ 1) + (− 4) − (+ 8) − (− 9) + (− 4) =
e) − (− 6) + (+ 7) − (+ 2) − (+ 9) − (+1) =

Afortunadamente, una parte de la sociedad actual va poco a poco reconociendo la casi absoluta falta de VALORES –con mayúsculas– imperante en una parte de la población, sobre todo en los adolescentes y jóvenes, y, también, admitiendo que una parte significativa de esa población se mueve, se orienta y vive teniendo como horizonte otros "valores" *–con minúsculas y entrecomillados–* que enseñan poco bueno, deforman mucho y conducen habitualmente por senderos poco convenientes.



Debemos quedar muy claro:

- **Que los VALORES se comienzan a conocer, a vivir y a practicar primero en la familia**, y de manera muy lenta, progresiva y continua, después en la escuela e instituto y, por último, en la sociedad. Estos VALORES cuesta mucho esfuerzo y perseverancia adquirirlos y aún más mantenerlos en la vida cotidiana. Mas perder algunos adquiridos es relativamente rápido y casi imperceptible.
- Los otros "valores" *–con minúsculas–* se adquieren, muy deprisa, en cualquiera de los muchos focos actuales que pululan en esta sociedad del siglo XXI. Y cuesta mucho desprenderse de ellos.

1.13.– Producto (multiplicación) y división de números enteros.

Para hacer operaciones de multiplicar y dividir números enteros aplicamos la regla de los signos, que como puedes observar es igual para las dos operaciones.

Debes acostumbrarte cuanto antes a sustituir el tradicional signo de multiplicar que has usado siempre en Primaria, es decir, el aspa ("**x**"), por el signo de multiplicar que vamos a usar siempre en Matemáticas, que es el punto ("**.**").

REGLA DE LOS SIGNOS

$$(+) \cdot (+) = (+)$$
$$(+) \cdot (-) = (-)$$
$$(-) \cdot (+) = (-)$$
$$(-) \cdot (-) = (+)$$

Observa que es igual para multiplicar y dividir.

$$(+) : (+) = (+)$$
$$(+) : (-) = (-)$$
$$(-) : (+) = (-)$$
$$(-) : (-) = (+)$$

El por qué, es decir, la explicación razonada de está regla de los signos se podría hacer de diversas formas, y seguramente al llegar a esta pregunta nos detendremos algo en unos ejemplos razonados que nos ayuden a dar una explicación lógica de la regla de los signos. De todos modos, la experiencia me lleva a concluir que lo importante es que te la sepas bien y, sobre todo, que la apliques siempre de forma correcta. Veamos algunos ejemplos de operaciones:

1) $(+3) \cdot (+2) = 6$	2) $(+5) \cdot (-4) = -20$
3) $(-4) \cdot (+7) = -28$	4) $(-1) \cdot (-8) = 8$
5) $(+26) : (+13) = 2$	6) $(+30) : (-5) = -6$
7) $(-10) : (+2) = -5$	8) $(-18) : (-6) = 3$

Resuelve tú los siguientes :

9) $(+6) \cdot (+1) =$	10) $(+4) \cdot (-1) =$
11) $(-3) \cdot 0 =$	12) $(-2) \cdot (-9) =$
13) $(+22) : (+11) =$	14) $(+36) : (-12) =$
15) $(-14) : (+7) =$	16) $(-40) : (-8) =$
17) $(+7) \cdot (+3) =$	18) $(+15) \cdot (-3) =$
19) $0 \cdot (+7) =$	20) $(-2) \cdot (-6) =$
21) $(+8) : (+2) =$	22) $(+32) : (-4) =$
23) $(-30) : (+6) =$	24) $(-12) : (-2) =$
25) $(+9) \cdot (+20) =$	26) $(+50) \cdot (-5) =$
27) $(-6) \cdot (+8) =$	28) $0 \cdot (-8) =$
29) $(+60) : (+15) =$	30) $(+28) : (-7) =$
31) $(-24) : (+6) =$	32) $(-15) : (-3) =$

1.14.– Propiedades del producto de números enteros.

a) Propiedad conmutativa.

El resultado del producto de números enteros no depende del orden en que se multipliquen.

33) $\left\{ \begin{array}{l} (+2) \cdot (-6) = -\mathit{12} \\ (-6) \cdot (+2) = -\mathit{12} \end{array} \right\}$

34) $\left\{ \begin{array}{l} (-5) \cdot (-8) = \ ? \\ (-8) \cdot (-5) = \ ? \end{array} \right\}$

35) $\left\{ \begin{array}{l} (+7) \cdot (-1) = \ ? \\ (-1) \cdot (+7) = \ ? \end{array} \right\}$

36) $\left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot (+9) = \ ? \\ (+9) \cdot (+1) = \ ? \end{array} \right\}$

b) Propiedad asociativa.

Al multiplicar enteros, la forma de asociarlos no altera el resultado.

37) $\left\{ \begin{array}{l} (+2) \cdot [(-6) \cdot (-1)] = (+2) \cdot (+6) = \mathit{12} \\ [(+2) \cdot (-6)] \cdot (-1) = (-12) \cdot (-1) = \mathit{12} \end{array} \right\}$

38) $\left\{ \begin{array}{l} (-3) \cdot [(-7) \cdot (-2)] = \ ? \\ [(-3) \cdot (-7)] \cdot (-2) = \ ? \end{array} \right\}$

39) $\left\{ \begin{array}{l} (+4) \cdot [(-8) \cdot (+5)] = \ ? \\ [(+4) \cdot (-8)] \cdot (+5) = \ ? \end{array} \right\}$

c) Propiedad elemento neutro.

El número entero uno ('1') es el elemento neutro del producto, porque al multiplicar cualquier número por uno se obtiene ese mismo número.

40) $(+5) \cdot (+1) = \mathit{5}$
41) $(-4) \cdot (+1) = \ ?$
42) $(+1) \cdot (-12) = \ ?$

d) Propiedad distributiva del producto respecto de la suma y la resta.

Al multiplicar números enteros por una expresión con paréntesis y/o corchetes en la que hay sumas y/o restas podemos hallar el resultado de dos formas:

- Distribuyendo el factor de fuera a todos los números de dentro, después efectuar los productos y "+" o "-" los resultados obtenidos. **Esto sería aplicando la propiedad distributiva.** Podríamos llamarla de fuera hacia dentro.

- Resolviendo en primer lugar las operaciones del paréntesis (o corchete) y multiplicando el resultado por el factor de fuera. **Esto sería SIN aplicar la propiedad distributiva.** Podríamos llamarla de dentro hacia fuera.

Veamos ejemplos:

1) (+ 5) . [(– 6) + (+10)] =
 a) Aplicando la propiedad distributiva:
 = (+ 5) . (– 6) + (+ 5) . (+ 10) = – 30 + 50 = ***20***
 b) Sin aplicar la propiedad distributiva:
 = (+ 5) . [(+ 4)] = ***20***

2) [– (+ 4) – (– 9) + (– 2)] . (– 6) =
 a) Aplicando la propiedad distributiva:
 = – (+ 4) . (– 6) – (– 9) . (– 6) + (– 2) . (– 6) =
 = + 24 – 54 + 12 = ***– 18***
 b) Sin aplicar la propiedad distributiva:
 [– 4 + 9 – 2] . (– 6) = 3 . (– 6) = ***– 18***

e) Propiedad sacar factor común.

Se llama factor común al número que se repite en una serie de productos. Para resolver expresiones donde eso suceda, se puede hacer de dos formas:

- Sacando el factor común (**repe**) fuera de cada producto y quedando los factores restantes de cada producto en un paréntesis (o corchete), resolviendo seguidamente lo que queda dentro del paréntesis y, por último, multiplicando ese resultado por el factor común. **Esto sería sacando factor común.**

- Resolviendo cada producto y efectuando a continuación con los resultados las operaciones indicadas. **Esto sería SIN sacar factor común.**

Veamos ejemplos del factor común:

3) (+ 2) . (– 4) – (– 7) . (– 4) =
 a) Sacando factor común:
 = [(+ 2) – (– 7)] . (– 4) = 9 . (– 4) = ***– 36***
 b) Sin sacar factor común:
 = – 8 – 28 = ***– 36***

4) – (– 2) . (– 4) + (+ 5) . (– 2) – (– 2) . (+ 3) =
 a) Sacando factor común:
 = (– 2) . [– (– 4) + (+ 5) – (+ 3)] =
 = (– 2) . [+ 4 + 5 – 3] = – 2 . 6 = ***– 12***
 b) Sin sacar factor común:
 = – 8 – 10 + 6 = ***– 12***

Ejercicios para resolver:

Resuelve de dos formas, aplicando la propiedad distributiva y sin aplicarla. Fíjate en los ejemplos.

5) (+ 4) . [(– 3) + (+ 8)] =
6) [– (+ 5) – (– 1) + (– 6)] . (– 2) =
7) (– 6) . [(+ 1) – (+ 9)] =
8) [– (+12) – (+6) + (+15)] . (– 3) =
9) 2 . [(– 3) + (– 5)] =
10) [– (+ 1) – (– 5) + (– 3)] . (– 3) =
11) (+ 40) : [– (– 4) + (– 8)] =
12) [(– 8) – (+ 1) + (– 12)] . (– 1) =
13) [(– 5) + (+ 7)] . (– 3) =
14) – 3 . [– (+ 8) + (– 2) – (– 6)] =

Resuelve de dos formas, sacando factor común y sin sacar factor común. Fíjate en los ejemplos.

15) (– 2) . (– 5) – (– 7) . (– 5) =
16) – (+1) . (–4) – (–5) . (–1) – (+1) . (+3) =
17) (+ 2) . 6 – (– 7) . 6 – 6 = (i)
18) –(–30) : (–5) + (–30) : (–3) + (–30) : 6 =
19) – (+ 2) . (+ 7) + (– 7) . (+ 7) =
20) – (+ 8) . (– 1) – 8 – (+ 8) . (+ 5) = (i)
21) (– 8) : (– 4) + (– 12) : (– 4) =
22) – (–9) . (–2) – (+1) . (–9) – (–9) . (+4) =
23) (+ 2) . (– 4) – (+ 7) . (+ 2) =
24) – (– 2) . (– 5) + (– 5) . (– 4) – (– 5) = (i)

Habrás observado que siempre que hay que distribuir la multiplicación se obtiene el mismo resultado de las dos formas, pero si hay que distribuir una división, unas veces sí da el mismo resultado y otras no. Igual sucede en las operaciones con el factor común. Al 1º que me dé una explicación correcta de por qué sucede eso, tendrá "cosecha" para el próximo control.

1.15.– Errores más comunes al operar con números enteros .

Hacerse un lío cuando hay muchos signos y números es normal en los alumnos al dar por primera vez los números enteros. Pero **seguir haciéndose un lío y operar de forma caótica después de varias semanas, incluso meses, de aprendizaje y entrenamiento, eso es más propio de alumnos que no atienden o lo hacen a la fuerza, que poseen poco o ningún interés, que carecen de una mínima capacidad de trabajo y que no han asumido cuál es el objetivo esencial de su asistencia a un centro educativo**. Bueno, excepción hecha de aquellos casos de alumnos con necesidades educativas especiales (a.c.n.e.e.) o necesitados de apoyo, a los cuales no hay que echar en cara nada de esto, antes al contrario, ayudarles todo lo que sea posible y conveniente.

Bien, pues en esta pregunta vamos a ver algunos de los fallos más habituales al operar con enteros. Así, al menos ese es el objetivo, los alumnos que tienen interés y dedicación lograrán tener menos errores y dominar antes todas las operaciones con enteros, que sin lugar a dudas son muy básicas y necesarias para los temas posteriores que demos en este y en próximos cursos.

Confundir los signos de sumas y restas con los de productos y divisiones es muy frecuente. Quedemos claro lo siguiente: **cuanto antes aprendas a escribir las operaciones de forma simplificada, antes llegarás a dominar todo lo relativo a los enteros**.

Sumas y restas:

$$\begin{array}{l} +\ (+\ ?) = +\ ? \\ +\ (-\ ?) = -\ ? \\ -\ (+\ ?) = -\ ? \\ -\ (-\ ?) = +\ ? \end{array}$$

Productos:

$$\begin{array}{l} (+\ ?)\ .\ (+\ ?) = +\ ? \\ (+\ ?)\ .\ (-\ ?) = -\ ? \\ (-\ ?)\ .\ (+\ ?) = -\ ? \\ (-\ ?)\ .\ (-\ ?) = +\ ? \end{array}$$

Divisiones:

$$\begin{array}{l} (+\ ?) : (+\ ?) = +\ ? \\ (+\ ?) : (-\ ?) = -\ ? \\ (-\ ?) : (+\ ?) = -\ ? \\ (-\ ?) : (-\ ?) = +\ ? \end{array}$$

1) $(-4) + (-3).(-2) = (-7).(-2) = 14 \rightarrow$ **MAL**, porque antes de sumar se debe multiplicar.
$(-4) + (-3).(-2) = -4 + 6 = 2 \rightarrow$ **BIEN**

2) $(-2) + (-5) = +7 \rightarrow$ Está **MAL**, ya que confunde, en los signos, la suma con el producto, y por eso aplica la regla de los signos.
$(-2) + (-5) = -7 \rightarrow$ **BIEN**

3) $(-2) . (-5) = -10 \rightarrow$ Está **MAL**, porque no ha aplicado bien la regla de los signos, y ha pensado que estaba sumando.
$(-2) . (-5) = +10 \rightarrow$ **BIEN**

4) $(-2) - (-5) = -7 \rightarrow$ **MAL**, ya que lo ha hecho como suma y es una resta.
$(-2) - (-5) = (-2) + (+5) = 3 \rightarrow$ **BIEN**

5) $(+3) + (-9) = +6 \rightarrow$ **MAL**, porque al sumar positivos y negativos se deben restar los valores absolutos y poner el signo del que tiene mayor valor absoluto.
$(+3) + (-9) = -6 \rightarrow$ **BIEN**

6) $(-4).(-3).(-1).(-2) = -24 \rightarrow$ **MAL**. Al ver todos negativos piensa que da "−", y no es así. Al aplicar la regla de los signos da "+". O se cuentan los signos negativos, y si da nº par sale "+", o si hay nº impar de "−" sale "−".
$(-4).(-3).(-1).(-2) = 24 \rightarrow$ **BIEN**

7) $(-3).(-1).(-2) + (-4) = +10 \rightarrow$ **MAL**, porque ha contado cuatro signos "−", que son pares, y ha puesto "+", pero cuando hay sumas y restas no se cuentan; eso es para "." y ":".
$(-3).(-1).(-2) + (-4) = -6 - 4 = -10 \rightarrow$ **BIEN**

8) $2 - (4 - 7) - 9 = 2 + 4 + 7 - 9 = -3 \rightarrow$ **MAL**, porque piensa que el 4 tiene un signo "−" y al cambiarlo le pone "+". El signo "−" ese es del paréntesis y el 4 tiene un "+", aunque no lo pone.
$2 - (4 - 7) - 9 = 2 - 4 + 7 - 9 = -4 \rightarrow$ **BIEN**

9) $(-18):(+6).(-3) = (-18):(-18) = 1 \rightarrow$ **MAL**, ya que en operaciones de "." y ":" sucesivas se debe operar de izquierda a derecha.
$(-18):(+6).(-3) = (-3).(-3) = 9 \rightarrow$ **BIEN**

Algunos alumnos no le dan mucha **importancia al estudio de estos errores**. Os aseguro que la tiene, y mucha. Aquellos que se fijan bien en todos los errores, cometen cada vez menos y, evidentemente, aprenden bastante más que los que no lo hacen.

1.16.– Operaciones combinadas de números enteros.

Una vez que nos hemos preparado poco a poco aprendiendo las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir enteros, ahora nos toca hacer un poco de "macedonia" con las operaciones. O si te parece, "un buen cocido", mezclando la " + ", " – ", " **.** " y " **:** " de números enteros, y por supuesto con paréntesis y/o corchetes.

En estas operaciones combinadas, que al principio constituyen un aprendizaje complicadillo para los alumnos, es necesario seguir un orden, como en todo proceso complejo. A este orden que hay que seguir se le llama también **PRIORIDAD o JERARQUÍA en las operaciones**, y es el siguiente:

> **1º) Se resuelven los paréntesis y corchetes.**
>
> **2º) Se hacen los productos y divisiones.**
>
> **3º) Se realizan las restas y las sumas.**

Veamos algunos ejemplos para que te familiarices con lo explicado y descubras por ti mismo las ventajas de realizar los ejercicios de este modo simplificado.

$$(-7) - (-2).(+4) - [15:(+3) + (-6).(-3):(-9)].(-1) + (-4) =$$

Esta expresión, un "poco" complicada, la podemos reducir (simplificar) a la siguiente:

$$-7 + 2.4 - [15:3 - 6.(-3):(-9)].(-1) - 4 =$$

Evidentemente ha quedado más asequible, ¿no? Sé lo que piensas, que todavía tiene bastante de enrevesada, ¿verdad?. Pero de cualquier modo, convendrás conmigo que suprimiendo adecuadamente todo lo que le hemos quitado estará menos complicada. Seguiremos los pasos que hemos explicado para operar correctamente con la **PRIORIDAD** (orden o jerarquía) exigible en todas las operaciones, no sólo en los enteros. Venga, a resolverlo:

1º) Los paréntesis o corchetes. Este corchete no se puede resolver "de golpe", ya que tiene diversas operaciones. Así que haremos las multiplicaciones y/o las divisiones, y en las de la derecha, que es una sucesión de productos y divisiones, debes empezar –se hace siempre así- de izquierda a derecha. Y quedaría:

$$-7 + 2.4 - [5 + 18:(-9)].(-1) - 4 =$$

¿ Sabes por qué no se han quitado los dos paréntesis que aún quedan ?

$$-7 + 2.4 - [5 - 2].(-1) - 4 =$$

$$-7 + 2.4 - [3].(-1) - 4 =$$

2º) Una vez efectuadas las operaciones de los paréntesis o corchetes, realizamos las multiplicaciones y/o divisiones y, por último, las restas y sumas. Manos a la obra...

$$-7 + 8 + 3 - 4 = +11 - 11 = \mathbf{0}$$

Y ya terminamos este ejercicio que a primera vista era muy laborioso. Desde luego "tirado" no estaba, ¿verdad? Algunos llegaréis a decir que si "merece la pena tanto para que dé tan poco". Bueno, desde luego que toda esa expresión nos da como resultado el número entero 0, que es un número como otro cualquiera, perteneciente a los naturales (∈ N) y, por supuesto, a los enteros (∈ Z).

OPERANDO NÚMEROS ENTEROS DE FORMA SIMPLIFICADA Y CON MÁS DIFICULTAD.

Fíjate en el **EJERCICIO RESUELTO** que viene a continuación. Observarás que utilizamos la **ESCRITURA SIMPLIFICADA** de números enteros explicada en las páginas anteriores, y, lógicamente, la **PRIORIDAD** que se debe seguir en expresiones de múltiples **OPERACIONES**. En este ejemplo te he detallado **CASI TODOS LOS PASOS**, cosa que no es necesaria para quien domine el cálculo de estas operaciones, que realizará todo esto en menos líneas y más rápido; tú debes aspirar a saber hacerlo sin tantos pasos. Hay que tener en cuenta que poco a poco será obligatorio resolver las operaciones de esta forma simplificada: sin tantos paréntesis ni tantos signos, sólo aquellos exclusivamente imprescindibles. Y para habituarte a ello, nada mejor y más eficiente que practicar con **INTERÉS Y CONCENTRACIÓN.** ¡Ánimo! (Reflexiona de vez en cuando sobre esto: el desánimo y el poco interés son las mejores armas para hacer las MATEMÁTICAS difíciles y poco atractivas. Bueno, en realidad eso sucede con casi todo en la vida, así que ...)

$$-5 + (-2 + 20:5.2) - \{30:[-12.(-3):9 - (-2)]:(-5)\} - 4 =$$
$$= -5 + (-2 + 4.2) - \{30:[36:9 + 2]:(-5)\} - 4 =$$
$$= -5 + (-2 + 8) - \{30:[4 + 2]:(-5)\} - 4 =$$
$$= -5 + 6 - \{30:[6]:(-5)\} - 4 =$$
$$= -5 + 6 - \{5:(-5)\} - 4 =$$
$$= -5 + 6 - \{-1\} - 4 =$$
$$= -5 + 6 + 1 - 4 =$$
$$= -5 + 6 + 1 - 4 =$$
$$= +7 - 9 = \mathbf{-2}$$

Ahora unos bloques de ejercicios con operaciones combinadas en los cuales se va poco a poco repasando todo lo explicado en este tema 1. Dominar el cálculo con números enteros es muy importante y básico, ya que si no es así, las dificultades en temas posteriores se irán acrecentando de manera muy significativa.

¡OJO! Cuando entre un número y un paréntesis o corchete, o entre dos paréntesis, o entre un paréntesis y corchete no aparece ningún signo, se considera que es un producto (•).

BLOQUE Nº 1

1) $(+12) + (+4) =$
2) $(+12) - (+4) =$
3) $(+12) \cdot (+4) =$
4) $(+12) : (+4) =$
5) $(+6) + (-2) =$
6) $(+6) - (-2) =$
7) $(+6) \cdot (-2) =$
8) $(+6) : (-2) =$
9) $(-20) + (+5) =$
10) $(-20) - (+5) =$
11) $(-20) \cdot (+5) =$
12) $(-20) : (+5) =$
13) $(-9) + (-3) =$
14) $(-9) - (-3) =$
15) $(-9) \cdot (-3) =$
16) $(-9) : (-3) =$
17) $(+2) \cdot (-1) \cdot (-9) =$
18) $(-3)(-5)(+1)(-2) =$
19) $(-1) \cdot (+4) \cdot (+7) =$
20) $(+6)(-2)(-5)(+1)(+1) =$
21) $(-5) \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (+4) =$
22) $(+12) : (-4) \cdot (-2) =$
23) $(-10) : (-2) : (-5) \cdot (+3) =$
24) $(+6) \cdot (-3) : (-9) : (-2) =$
25) $(-24) : (-8) : (-3) \cdot (-5) =$
26) $(-3) \cdot (-4) + (-7) =$
27) $-(+10) : (-2) - (-9) =$
28) $(+5) \cdot (-6) : (-3) - (+8) =$
29) $(-2) + (-7) - (-5) \cdot (+3) =$
30) $(-4) \cdot (-5) - (-12) : (-3) - 5 =$
31) $(+8)(-4)(+5) - (-7) =$
32) $-(+1) + (-3) - (+5)(-2) =$
33) $(-4) \cdot (+5) : (-2) + (-3) \cdot (+6) =$
34) $-6 + 3 \cdot [5 - 2 \cdot 3 \cdot (-4)] - 7 =$
35) $9 - 5 [-2 + (-12) : (-6)] =$
36) $(-4+7) \cdot (6-10) : 2 - (-5) =$
37) $10 - 3(5 - 7) + (-4 + 1)2 =$
38) $-3 + 7[4 - 5 \cdot 2 - (+1)] =$
39) $-(8-3) \cdot (-2) + (-5) \cdot (-4+6) =$
40) $-[5 \cdot (-2) - 1] \cdot (-3) - (+7) =$
41) $4 \cdot 2 \cdot (-3) - (-6) + 5 \cdot (-1) =$
42) $-10 : (-5) + 5 - (-3 + 2) =$
43) $3 + 2[-6 + (-3)(-2)] - 4 =$

BLOQUE Nº 2

44) $(-2) \cdot (-3) + (-5) =$
45) $(+6)(-2)(-1) - (+7) =$
46) $(+30) + (+6) =$
47) $(+30) - (+6) =$
48) $(+30) \cdot (+6) =$
49) $(+30) : (+6) =$
50) $(+8) + (-4) =$
51) $(+8) - (-4) =$
52) $(+8) \cdot (-4) =$
53) $(+8) : (-4) =$
54) $(-15) + (+3) =$
55) $(-15) - (+3) =$
56) $(-15) \cdot (+3) =$
57) $(-15) : (+3) =$
58) $(-21) + (-7) =$
59) $(-21) - (-7) =$
60) $(-21) \cdot (-7) =$
61) $(-21) : (-7) =$

---

62) $(-2) \cdot (+5) \cdot (-1) =$
63) $(+4)(+3)(-1)(+5) =$
64) $(-7) \cdot 0 \cdot (+2) =$
65) $(+2)(-5) + (-1)(+6) =$
66) $(-3) \cdot (-2) \cdot (-5) \cdot (+1) \cdot (-4) =$
67) $(+24) : (-6) \cdot (+1) =$

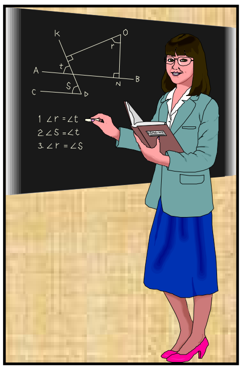
---

68) $5 - (6 - 8) \cdot (-1) =$
69) $(4 - 9)(-3 + 1) - (-7) =$
70) $6 + 2 \cdot [4 - (-3 + 5)] - 1 =$
71) $3 - 7[-2 \cdot (-5) + 4] =$
72) $[10 - (-2) \cdot 5] \cdot (-3) - (+1) =$
73) $[-2 + (-9) : 3] : [5 + (-2) \cdot 3] =$
74) $(6 - 4 \cdot 2)(3 \cdot 5 - 10) =$
75) $3 + 2(1 - 5) - (7 - 9)(-1) =$
76) $4 \cdot (-3) \cdot 0 - (-7 + 2) =$
77) $-(+6)(-1) + 5 - 4(2 - 7) =$
78) $[4 - 3(-1) + 5(-2)] : (-2) =$
79) $1 + 2[-3(-5) + 0 \cdot (-1)] =$
80) $\dfrac{-3 \cdot (-6)}{-2} - (-1) \cdot (+4) - \dfrac{-9}{3} =$

En estos dos bloques hay ejercicios con progresiva dificultad, como fácilmente puedes observar. Desde los más sencillos y simples en los que sólo aparece una operación hasta aquellos más complicados con varias operaciones, además de paréntesis y corchetes. A continuación, en otras páginas, hay otros bloques en los cuales se van aumentando las dificultades. **¡Ah! No están todos aquí en el libro para que se hagan en 1º, ni en 2º, sino para hacerlos poco a poco a lo largo de dos o tres cursos, incluso en 3º. Y no para realizarlos todos, sino para elegir dentro de las posibilidades de cada alumno o grupo, adaptando la elección a sus capacidades.**

ORIENTACIONES PARA TU ESTUDIO EN MATEMÁTICAS

¿ Qué material debes utilizar ?



- **Los apuntes de clase.**
  - *Con buena presentación, ordenados y claros.*
  - *Comprobar que los has copiado bien; es conveniente compararlo con los de otros compañeros.*
- **Las fichas complementarias repartidas.**
  - *Siempre guardadas en un mismo archivador, y ordenadas.*
  - *Sin grapar, pues se deterioran.*
  - *Teniendo siempre presenten que sirven para completar cada tema.*
- **Libros de cursos anteriores, o de texto de tu curso, si los hay.**
  - *Cuando sea necesario repasar conceptos de años anteriores.*
  - *Cuando te lo aconseje tu profesor.*

¿ Cómo es conveniente estudiar MATEMÁTICAS ?

- **La teoría.**
  - En primer lugar, una lectura comprensiva.
  - En segundo lugar, razonando lo que lees.
  - Casi imprescindible usar lápiz, papel y goma.
  - Memorizar los conceptos aprendidos/comprendidos.
- **Los ejercicios.**
  - Hacer los ejercicios individualmente.
  - Corregirlos con interés de aprender; para ello es esencial ver, distinguir y comprender los errores cometidos.
  - Procura tener un método para diferenciar en tus apuntes los fallos pequeños de los errores garrafales. Por ejemplo, utilizando distintos colores o subrayados.
  - No dejes nunca los fallos como están, ya que cuando repases –si eres buen estudiante lo harás– será necesario que todo esté correcto, léase corregido.

¿ Cuándo/cuánto/dónde debes estudiar ?

- Hay que estudiar cada día, lo que no quiere decir todos los días. O sea, que cada día hay que estudiar lo que te van explicando, sea teoría y/o ejercicios. Es la única forma de asimilar bien.

- Al terminar un tema, además de repasarlo bien, es conveniente volver a repasar el anterior.
- Los que tienen por costumbre estudiar sólo para el control, tarde o temprano consiguen un suspenso con toda seguridad.
- Estudia cada día a las mismas horas. Si es posible, cada asignatura aproximadamente a una hora fija. (En mi opinión, deberías empezar siempre por Lengua y Matemáticas, ya que se rinde más)
- Estudia en un lugar adecuado de tu casa: con buena luz, ventilado, con todo el material a mano y solo, solo y solo. Es fundamental para adquirir un buen hábito de estudio que no tengas nada que te pueda distraer, ni personas, ni animales, ni cosas. Y, sobre todo, lejos, muy lejos de la televisión.

¿Y sabes algo que es muy importante?

ESTAR SIEMPRE ATENTO EN CLASE.

Veamos otros ejemplos:

Recuerda:

1º) Se operan primero los paréntesis, después corchetes y al final las llaves.
Y dentro de ellos, o fuera, se sigue así:

2ª) A continuación, **(.)** y **(:)**, operando de izquierda a derecha.

3º) Por último, las $(-)$ y $(+)$.

Vamos a resolver algunos de dos formas:

⊗ Una más larga, escribiendo signos y paréntesis como cuando se aprende al inicio.

⊗ Otra más rápida y práctica, que es la llamada escritura simplificada (reducida), y es a la que debes habituarte cuanto antes.

1) $(-6).(+2).(-3)-(-10):(-5)+\left[(-1)-(-4)\right]:(+3)=$

a) En forma (larga) de aprendizaje inicial:

$=(-12).(-3)-(+2)+\left[(-1)+(+4)\right]:(+3)=$

$=(+36)+(-2)+\left[(+3)\right]:(+3)=$

$=(+36)+(-2)+(+1)=(+37)+(-2)=\boldsymbol{+35}$

b) De forma (práctica) simplificada:

$=+36-2+3:3=36-2+1=\boldsymbol{35}$

2) $(-30):(+5).(+2)-\dfrac{(-6).(+3).(-1)}{(-9)}+(-4).0-(-8)=$

a) De forma (larga) de aprendizaje inicial:

$=(-6).(+2)-\dfrac{(-18).(-1)}{(-9)}+0+(+8)=$

$=(-12)-\dfrac{(+18)}{(-9)}+(+8)=(-12)-(-2)+(+8)=$

$=(-12)+(+2)+(+8)=(+10)+(-12)=\boldsymbol{-2}$

b) De forma (práctica) simplificada:

$=-12+2+8=\boldsymbol{-2}$

BLOQUE Nº3

3) $-(-2).(-4)+5\,(7-9)+10=$

4) $(-3+5-10):(-2)-(-1).(-3)+(-2)=$

5) $-(-18):(+3)+(-1).(-2)-(+15)=$

6) $-4.(3-10-2)+24:(5-1+4)=$

7) $-5-2.\left[6+2.(-5)\right]-(+7)=$

8) $20:\left\{-9-\left[2.(-3)+8\right]-3.3\right\}=$

9) $-(-12):3.(-4)-\dfrac{5.(-2).(-4)}{-10}=$

10) $(5-3.4).(-8+2.5)+(-6).3.0.(-1)=$

11) $-(+9)+\dfrac{-3.7.0}{-6}-(-10+3.2)=$

12) $-24:\left[10+4.(-3)+(-8):2\right].(-5)=$

BLOQUE Nº4

13) $-(2-3).\left[9-6.(3-5+1)\right]=$

14) $-30:\left[-4+3.(-2)\right]-(6-10).(-8+5)=$

15) $-\dfrac{-3.5.(-6)}{-2}+(2-7).(8-2.5)=$

16) $\left[-8+2.(-3).0-(-4)\right]:(-2).6=$

17) $\dfrac{10.(-5).0.(-1)+(-12)}{-3}-(+4)=$

18) $-\left[7+(-4+5.2)-6\right]-\dfrac{8.0.(-1)}{-5}=$

19) $\left[-6+2.(-5)\right]:\left[2-3.(+5)+(-3)\right]=$

20) $\dfrac{4.\left[3+5.(-2)-(-7)\right]}{-6}-(+4)=$

21) $9-6.3-\dfrac{5.(-1)+(-2).10}{-5}=$

22) $-4+5.(-3)-\dfrac{-2.4-9.0-(-6)}{-2}=$

23) $5.(-10):(-2).(-1)+\dfrac{6+2.(-5)}{4}=$

24) $\dfrac{-2.\left[4+3.(-5)\right]}{-11}-(-6).7.0.(-1)=$

BLOQUE Nº5

25) $\dfrac{7.(-4)}{-2}-32.\left[6-(2-4)-(+5)\right]=$

26) $\left[-(1-8)+(-6+9).2-1\right].3-40=$

27) $-(-8+3)+2\left\{-4-\left[5\,(6-9)-2\,(7-3)\right]\right\}=$

28) $20-5.(1-3)-\left[1-4.(+2)+(-7)\right]-15=$

29) $\left[3.(4-6)+(1-5)\right].(-2).\left[-3-5.(2-6)\right]=$

30) $4.(-3)-(+20).\left[5-(-4).(6-2)+(-1)\right]=$

31) $-5+2.\left[6-(-2+8)+30:(8-6.3)\right]-3=$

32) $-(-3+1)-22:\left[6\,(-2-3)-4\,(-7+5)\right]=$

33) $(9-13).(-2)+12:(6-8)-3.(1-7+15)=$

34) $-5-\left[9.(-2)-5.(1-4)+(-8)-(-1)\right]:(-2)=$

35) $-(+3).5-8:\left[3-2.(1-4)-(+9)\right]-6=$

36) $\left[(-9+3):2-7\right].2-33:\left[(-4+1).5-(-2).(+2)\right]-(+1)=$

BLOQUE Nº6

37) $\left[-4.(+2):(-1):8-(+1)\right]:\left[-(+2)+(-3)-(-7)\right].10.(-2)=$

38) $-8+(-7+30:6.3)-\left\{18:\left[-24:(-8):3-(-2)\right]:(-6)\right\}-6=$

39) $12:3.(-1).5-\left\{-15.\left[7-3.(-12):9-(-2):(-2)\right]:(-5)\right\}=$

40) $-\left\{4+\left[30:6.(-3):5\right]-1\right\}:(-1)+\left\{-18+\left[-18:3.0\right]:(-5)\right\}:(-2)=$

41) $25:5.2:(-10)-\left\{-(-32):\left[-2.(-3).5-(-2)\right].(-15)\right\}:(-5).8=$

Muchos ejercicios de enteros. Quizás demasiado. Pero están preparados y dispuestos **para ser realizados a lo largo de dos o tres años,** de ahí la gran cantidad, variedad y grados de dificultad.

Algunos ejercicios resueltos de la página anterior:

3) $-(-2).(-4)+5(7-9)+10=$

a) **En forma (larga) de aprendizaje inicial:**

$=+(+2).(-4)+5.(-2)+10=$

$=(-8)+(-10)+10=$

$=(+10)+(-18)=\ -\mathbf{8}$

b) **De forma (práctica) simplificada:**

Te explico un poco. Hacemos tres partes, que aunque ahora yo te las detalle, pero se hacen mentalmente.

⊗ Una es $-(-2).(-4)$. Tres negativos → "−" y la cuenta, 2.4 → 8, o sea, esta parte da -8.

⊗ Otra es $5(7-9)$. El paréntesis da → -2, y $5.(-2)\ \rightarrow\ -10$.

⊗ La última parte es $+10$.

$=-8-10+10=-\mathbf{8}$

4) $(-3+5-10):(-2)-(-1).(-3)+(-2)=$

El primer paréntesis da → -8, el producto intermedio es igual a → -3 (tres negativos y la cuenta 3) y después seguimos así:

$=(-8):(-2)-3-2=4-3-2=-\mathbf{1}$

5) $-(-18):(+3)+(-1).(-2)-(+15)=$

$=6+2-15=-\mathbf{7}$

13) $-(2-3).[9-6.(3-5+1)]=$

a) **En forma (larga) de aprendizaje inicial:**

$=-(-1).[9-6.(-1)]=$

$=+1.[9+6]=1.15=\mathbf{15}$

b) **De forma (práctica) simplificada:**

$=1.[9-6.(-1)]=\mathbf{15}$

14) $-30:[-4+3.(-2)]-(6-10).(-8+5)=$

$=-30:[-4-6]-(-4).(-3)=$

$=-30:(-10)-12=3-12=-\mathbf{9}$

15) $-\dfrac{-3.5.(-6)}{-2}+(2-7).(8-2.5)=$

La fracción tiene cuatro negativos (da "+") y la cuenta es es 15 . 3 = 45. Los paréntesis dan "−5" y "−2". Y sigue:

$=45-5.(-2)=45+10=\mathbf{55}$

25) $\dfrac{7.(-4)}{-2}-32.[6-(2-4)-(+5)]=$

a) **En forma (larga) de aprendizaje inicial:**

$=\dfrac{-28}{-2}-32.[6-(-2)-5]=$

$=+14-32.[6+2-5]=$

$=+14-32.[3]=14-96=-\mathbf{82}$

b) **De forma (práctica) simplificada:**

$=14-32.3=14-96=-\mathbf{82}$

26) $[-(1-8)+(-6+9).2-1].3-40=$

$=[7+6-1].3-40=36-40=-\mathbf{4}$

27) $-(-8+3)+2\{-4-[5(6-9)-2(7-3)]\}=$

$=5+2\{-4-[-15-8]\}=$

$=5+2\{-4+23\}=5+2.19=\mathbf{43}$

Opiniones diversas sobre la revolución mundial de la Informática e Internet:

PACIANO: "A mí el ordenador me ha ayudado muchísimo en mi formación. Tengo más conocimientos de todo, más interés por trabajar y creo que sin él mi preparación académica sería bastante inferior".

PERPETUA: "No dudo lo que dices, pero lo que yo disfruto del ordenador son de los buenos ratos que paso con los juegos estupendos que me he comprado".

REMIGIO: "Yo paso de ordenador, ya que a mí me parece que es una verdadera pérdida de tiempo utilizarlo en clase para aprender algo".

JUANA: "Mirad, según mi experiencia, que compruebo muchas veces con mis amigos, lo que yo observo es que la mayoría tiene vicio de buscar páginas de sexo en Internet, pero de estudiar y aprender poco, o sea, 'na de na', sólo perder mucho tiempo".

BENITO: "En mi opinión se han pasado poniendo tantos ordenadores en las aulas. Llevamos ya un año o más con ellos y casi nunca se usan en la mayoría de las asignaturas. Por eso yo creo que quizás todo ese dinero se podría haber empleado en otros medios".

GABY: "Los avances en la tecnología informática, además de espectaculares, son maravillosos. Sin embargo, aunque solucionan algunos problemas, no solucionan todos los problemas, ya que si así fuera podríamos considerar este progreso como magia o embrujo, y los que creemos en la ciencia no debemos permitirnos ese 'lujo' tan atractivo en el nuevo milenio".

DAVID: "Yo creo que los ordenadores son necesarios, sin lugar a dudas, pero sólo en algunas aulas de asignaturas que realmente lo necesitan y un par de aulas disponibles para todo profesor que quiera usarlas puntualmente, pero no generalizar el uso, porque es un gasto innecesario, además de otras cosas ...".

ISIDORA: "Los niños no aprenden a leer porque sus padres o profesores le hagan disponer de muchos libros. Igualmente, porque tengamos un ordenador para dos alumnos, ni siquiera aunque dispusiéramos de uno para cada cual, no vamos a ser ya 'sabios' o 'genios' o 'listos'. Pienso que la pizarra, la tiza, el libro, el cuaderno, etc., serán siempre imprescindibles para lograr una Educación correcta y completa".

MARCELO: "Bajo mi punto de vista, la mayoría de los alumnos ya no saben hacer un trabajo de forma correcta y apropiada, porque sólo se limitan a copiar de Internet, pegar en un archivo e imprimir, con lo cual aprenden muy poco del trabajo encomendado, cuando se supone que lo que buscaba el profesor en sus alumnos al encargárselo es la adquisición de una información y un aprendizaje".

ELISENDA: "Bueno, es verdad que hay quienes hacen eso, pero es indudable también que Internet es una herramienta valiosísima para informarse, para adquirir más conocimientos, para completar estudios, para comunicarse, etc.".

JUSTO: "A ver, siempre, a lo largo de la historia de la humanidad, se ha dicho que lo que hay que evitar en el progreso es que el hombre sea esclavo de la máquina. Pues eso mismo: que no seamos esclavos del ordenador ni de Internet, sino que lo utilicemos para servirnos".

¿Cuál es tu opinión en este minidebate planteado?

1.17.– Detectar errores y analizarlos.

En las siguientes igualdades hay unas que están desarrolladas correctamente y otras no. Como verás, las primeras (1^{er} cuadro) están resueltas, es decir, se ha descubierto si son correctas o erróneas y, además, se ha explicado el por qué están bien o mal. Pues tú debes hacer igual con las siguientes (cuadro de la otra columna).

1) $12 + 3 \cdot 2 = 15 \cdot 2 = 30$

FALSO, porque no sigue el orden en las operaciones, ya que antes de sumar se debe multiplicar.

$12 + 3 \cdot 2 = 12 + 6 = 18$ → **Bien**

2) $(+5) - (-3) = +2$

INCORRECTO, porque al restar hay que sumar el opuesto.

$(+5) - (-3) = 5 + 3 = 8$ → **Bien**

3) $(-2) \cdot (-1) \cdot (-5) \cdot (+3) = -30$

BIEN, porque al aplicar la regla de los signos da negativo, y los productos están correctos.

RECUERDA: en productos y/o divisiones sucesivas una cantidad impar de "−" da "−", una cantidad par de "−" da "+".

4) $+7'5 \rightarrow \in \mathbb{N}, \in \mathbb{Z}$

MAL, porque los decimales no son ni naturales ni enteros.

$+7'5 \rightarrow \notin \mathbb{N}, \notin \mathbb{Z}$ → **Bien**

5) $-209 \rightarrow \in \mathbb{N}, \notin \mathbb{Z}$

MAL, porque los negativos no son naturales pero sí son enteros.

$-209 \rightarrow \notin \mathbb{N}, \in \mathbb{Z}$ → **Bien**

6) $\dfrac{-6'25}{-0'5} \rightarrow \in \mathbb{N}, \in \mathbb{Z}$

BIEN, porque aunque hay dos decimales negativos, al hacer la operación se obtiene un número natural.

$\dfrac{-6'5}{-0'5} = +13 \rightarrow \in \mathbb{N}, \in \mathbb{Z}$

7) $(-18) : (-6) = -3$

ERRÓNEO, porque $(-) : (-)$ da $(+)$.

$(-18) : (-6) = 3$ → **Bien**

8) $(+7) \cdot (-3) \cdot 0 \cdot (-1) = 0$

CORRECTO, porque cualquier producto por 0 siempre da 0.

9) $-[9-(2-10+1)]-3+(-8-17+5) =$
$= -[9+2+10-1]-3-8-17+5 =$
$= +9-2-10+1-3-8-17+5 =$
$= +15-40 = -25$

FALSO, porque el 9 y el 2, que son positivos, al llevar el paréntesis del 2 y el corchete del 9 un signo "−" delante deben cambiar de signo. Bien sería así:

$= -[9-2+10-1]-3-8-17+5 =$
$= -9+2-10+1-3-8-17+5 = 8-47 = -39$

En los siguientes ejercicios, que están resueltos, debes detectar los posibles errores que haya en cada uno de ellos, y, además de descubrirlos, explicar brevemente por qué está mal y hacerlos tú debajo bien.

Ten en cuenta que no puntúa nada decir si está bien o mal, o si hay error o no. Sólo estará contestado correctamente si das una explicación convincente del por qué está resuelto de forma incorrecta y lo haces bien.

1) $5 - 2 \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12$
2) $6(2-5) = -18$
3) $(-2) \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot (-10) = 60$
4) $-1 + 4 - (2-7) = 3 - 5 = -2$
5) $(-10) \cdot (-1) + (-2) \cdot (+3) = (+10) + (-6) = -4$
6) $-3 \cdot (2-7) = (-3) \cdot (-5) = -15$
7) $2'56 \rightarrow \notin \mathbb{N}, \in \mathbb{Z}$
8) $(-12) : (-4) \cdot (+3) = (-12) : (-12) = 1$
9) $-7 \rightarrow \in \mathbb{N}, \notin \mathbb{Z}$
10) $0 \rightarrow \in \mathbb{N}, \in \mathbb{Z}$
11) $(-18) : (+3) = 6$
12) $10 + 2 \cdot 5 = 12 \cdot 5 = 60$
13) $-0'75 \rightarrow \notin \mathbb{N}, \in \mathbb{Z}$
14) $5 \cdot (-1) \cdot (-2) + (-4) \cdot 0 \cdot 3 = 10 - 12 = -2$
15) $-2 \cdot 4 + 3 = -5$
16) $-5 - (7-4) = -5 + 7 + 4 = -5 + 11 = 6$
17) $6 \cdot (-5) + (+5) = 6 \cdot 0 = 0$
18) $\dfrac{-0'75}{-0'05} \rightarrow \in \mathbb{N}, \in \mathbb{Z}$
19) $-1'44 : 0'12 \rightarrow \notin \mathbb{N}, \in \mathbb{Z}$
20) $35 / 6 \rightarrow \in \mathbb{N}, \in \mathbb{Z}$
21) $-10 \cdot 2 + 7 = -10 \cdot 14 = -140$
22) $-8(5-9) = 20$
23) $(-30) : (-6) \rightarrow \notin \mathbb{N}, \in \mathbb{Z}$
24) $12 : (-2) - 12 : (-4) = 12 : [(-2) - (-4)] =$
$= 12 : [-2+4] = 12 : 2 = 6$
25) $20 : (-4) + 12 : (-4) = [20 + 12] : (-4) =$
$= 32 : (-4) = -8$
26) $10 : (5-2) = 10 : 5 - 10 : 2 = 2 - 5 = -3$
27) $(18 - 12) : 3 = 18 : 3 - 12 : 3 = 6 - 4 = 2$
28) $\dfrac{(-7) \cdot 3 \cdot (-2) + (-4) \cdot 0}{-5} = \dfrac{0}{-5} = 0$
29) $(-5) \cdot (-1) \cdot (+2) \cdot (+1) \cdot (-2) \cdot (-10) = 200$
30) $\dfrac{-6+3-2 \cdot (-5)}{0} = 0$ (¡)
31) $3 \cdot [8 - 2 \cdot 3 + (-2)] : (-4) = 0$
32) $\dfrac{-4 \cdot 10 - 5}{-2} = \dfrac{-4 \cdot 5}{-2} = \dfrac{-20}{-2} = 10$
33) $\dfrac{9 - (-2) \cdot 3}{15} = \dfrac{9+6}{15} = \dfrac{15}{15} = 0$
33) $-45 \rightarrow \notin \mathbb{N}, \in \mathbb{Z}$
34) $-\dfrac{-6 \cdot (-3) \cdot (+2) \cdot (-1)}{-5 \cdot 3 \cdot (-4)} = +\ ?$

1.18.– Problemas relacionados con números enteros.

En la resolución de problemas, sean del tipo que sean, es muy conveniente seguir una serie de pasos que ayudarán a comprenderlos mejor y a resolverlos. Con toda seguridad que hay otros pasos, además de éstos que voy a decirte, pero es mejor empezar habituándote a unos pasos elementales, y seguro que con ellos tienes un buen porcentaje resuelto de cada problema. Veamos esas normas básicas:

1º) **Leerlo sin prisas, con atención e interés.**
2º) **Vuelve a leerlo, pero ahora más detenidamente, fijándote más en los detalles.**
3º) **Lo relees para llegar a la conclusión de que sabes repetirlo correctamente sin leerlo, demostrándote a ti mismo que te has enterado.**
Y después:
4º) **Empieza a resolver el problema con los métodos que consideres apropiados.**

En muchas ocasiones, más de las que puedas imaginar, hay un "truquillo" para resolver problemas, o mejor dicho, para saber qué hay que hacer. Consiste en recurrir a simplificarlo (reducirlo) con números sencillos y situaciones de la vida cotidiana que nos son más cercanas. O sea, poner el problema más a nuestro alcance para que el entendimiento y capacidad de analizarlo sean mayores.

Bien, pues en torno a los múltiples problemas sobre enteros, hay un tipo de ellos que suelen resolverse muy bien con alguna/s de estas tres fórmulas.

1) Situación Inicial + Variación = Situación Final
↓ ↓ ↓
S.I. + V. = S.F.

2) Situación Final – Situación Inicial = Variación
↓ ↓ ↓
S.F. – S.I. = V.

3) Situación Final – Variación = Situación Inicial
↓ ↓ ↓
S.F. – V. = S.I.

Veamos algunos problemas resueltos. ¡Ah! Y no te asustes cuando veas lo extenso que resultan; se debe a las explicaciones que te escribo para que logres comprenderlos mejor. Y a veces me enrollo más de la cuenta. Pero todo sea porque aprendas mejor y con más calidad. Después, cuando tú hagas problemas, basta escribir la fórmula, los datos y resolverlos.

PROBLEMA RESUELTO Nº 1.

Una sustancia se encuentra a 6º bajo cero y pasa por calentamiento a 34º sobre cero. ¿Cuál ha sido la variación de temperatura experimentada?

Sin lugar a dudas, habrá alumnos que quizás sepan la solución de este problema mentalmente, sin fórmulas, sin operaciones y casi de forma inmediata. Pero creo que es muy conveniente las explicaciones de los distintos pasos que vamos a dar para resolverlos, pues quizás, también, habrá alumnos que se den cuenta de que se han equivocado al hacerlo rápidamente y, sobre todo, porque así aprenderemos un método para resolver otros problemas que no sean tan sencillos como a simple vista parece éste.

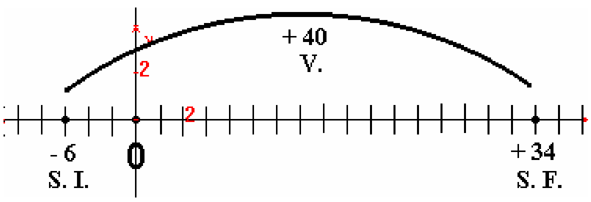
Pues bien, ahora viene a cuento ese "truquillo" que mencionaba anteriormente y que nos hace el problema más comprensible y más cercano. Se trata de transformar el problema dado en otro de lo que yo llamo "problema de bolsillo", que no es más que reducirlo a unas cantidades sencillas y más entendibles con las cuales descubrimos de forma más sencilla qué operaciones hay que hacer para luego aplicarlas en el problema inicial.

Veamos: si tú tienes en tu bolsillo **4 €** y pasado un cierto tiempo pasas a tener **11 €**, ¿qué ha pasado? Inmediatamente, hasta alumnos de primeros cursos de Primaria, responderían que, por ejemplo, nos han dado **7 €**. ¿Y para qué sirve todo este rollo? Bien, pues ahora habría que preguntarse qué ha hecho nuestra mente para ver rápidamente que nos han dado **7 €**. Y vemos que a la SITUACIÓN FINAL (**11 €**) le ha restado la SITUACIÓN INICIAL (**4 €**). Así que ya sabemos qué hay que hacer en el problema dado: restar a la situación final (**+34º**) la situación inicial (**–6**). ¡OJO! Estamos en el tema de los números enteros, y **6º** bajo cero se expresa con un **6** precedido de un signo menos, ya que todas las situaciones por debajo de cero son números negativos. Luego aplicamos la fórmula nº 2 del cuadro de la columna anterior.

Forma numérica de resolverlo, con la fórmula:

S.F. – S.I. = V.
↓ ↓ ↓
$(+34º) - (-6º) = (+34º) + (+6º) = +40º$

Forma gráfica de resolverlo, con una recta entera:



SOLUCIÓN:
→ **La variación de temperatura fue de + 40º.**

PROBLEMA RESUELTO N º 2.

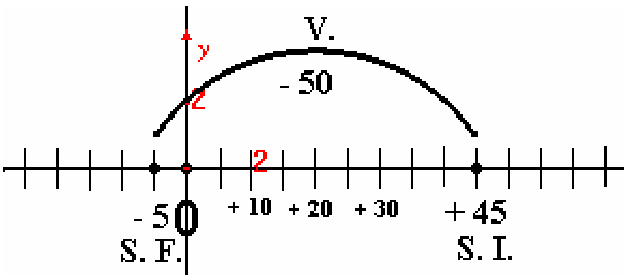
Una barra de metal se encuentra a 45º sobre cero. Se enfría y experimenta una variación de temperatura de 50º. ¿Cuál es la temperatura final de dicha sustancia?

Procediendo de forma análoga al anterior, el truquillo de bolsillo sería: si yo tengo **8 €** y gasto **5 €**, pues me quedan **3 €**. ¿Qué se ha hecho? Pues sumar a la situación inicial (**8 €**) la variación (**5 €**). Y me quedan **3 €**. Bien pues eso hacemos. Ten cuanta que enfriar 50º es → – 50.

Forma numérica de resolverlo, con la fórmula :

S. I.	+	V.	=	S. F.
↓		↓		↓
(+ 45º)	+	(– 50º)	=	– 5º

Forma gráfica de resolverlo, con una recta entera :



SOLUCIÓN :
→ La temperatura fue de – 5º.

PROBLEMA RESUELTO N º 3.

Uno de los cursos de la E.S.O. del I.E.S. Meléndez Valdés ha aprovechado tan bien sus clases y son tan estudiosos y responsables que el Equipo Directivo del Centro ha creído oportuno invitarles a una estupenda e invernal excursión por la Cordillera Penibética. En la semana que pasaron por aquellos parajes nevados y atrayentes tuvieron las siguientes temperaturas: – 2º, + 5º, + 7º, – 1º, 0º, – 3º y +1º. ¿Cuál fue la temperatura media de esa semana?

Para hallar la media aritmética de una serie de datos se suman todos los datos y se divide el resultado entre la cantidad de datos que se suman.

$$\text{Media} = \frac{-2 + 5 + 7 - 1 + 0 - 3 + 1}{7} = 1^{\circ}\ \text{C}$$

PROBLEMAS PARA RESOLVER :

NOTA: en lo problemas 1, 3, 4, 7, 8 y 9 debes hacerlo de forma numérica (con la fórmula) y de forma gráfica (con una recta entera y la flecha correspondiente).

4.- Una sustancia utilizada en un laboratorio sufre una bajada de temperatura de 17º, con lo que su temperatura pasa a ser de 2º bajo cero. ¿Cuál era la temperatura inicial?

5.- A lo largo de una quincena de un mes de invierno se han anotado las siguientes variaciones de temperatura: – 3º, – 1º, + 2º, 0º, – 5º, – 4º, – 8º, – 1º, 0º, + 1º, + 2º, + 3º, + 3º, + 2º y – 6º. Halla la temperatura media de dicha quincena.

6.- El termómetro de una habitación frigorífica destinada a la conserva de pescado marca 5º C bajo cero. Como consecuencia de un descuido se produce un incendio que afortunadamente se sofoca rápidamente. En ese instante del fin del incendio el termómetro marca 89º C. ¿Cuál ha sido la variación de temperatura experimentada?

7.- Una sustancia muy fría se encuentra a 3º bajo cero. Se enfría 8º C más. ¿Cuál es su temperatura final?

8.- Pitágoras, sabio griego que sobresalió en varias ciencias, nació el año 572 a. de C. ¿Cuántos meses han transcurrido desde su nacimiento hasta el año actual?

9.- Las temperaturas tomadas en una semana gélida del mes de enero fueron las siguientes : + 5º C, + 3º C, – 1º C, – 6º C, – 10º C, – 7º C y + 2º C. Calcula la temperatura media de esa semana "veraniega".

10.- A las 6 de la tarde de un hermoso día del mes de marzo, en nuestra querida Villafranca, hace una temperatura de 29º C. Poco a poco, hasta las 6 de la madrugada, la temperatura fue descendiendo. Incluso llegó a nevar, cosa bastante perjudicial para nuestra agricultura en esa época primaveral. Si la variación de temperatura fue de 32º, ¿a cuántos grados bajó el termómetro?

11.- El congelador de un frigorífico tiene una temperatura de 5º C bajo cero. Necesitamos más frío y le damos al botón que congela más hasta que el cuadrito de los dígitos que marcan la temperatura marca – 9º C. ¿Cuál ha sido la variación de "t"?

12.- Al enchufar a la corriente eléctrica un congelador la temperatura va descendiendo 2º C cada 8 minutos. A la 4 horas el congelador estaba a 10 º bajo cero. ¿A qué temperatura estaba antes de enchufarlo?

13.- Pitágoras nació el año 572 a. de C. y Thales de Mileto el año 639 a. de C. ¿Quién nació antes?
(Busca en una Enciclopedia o en Internet información sobre estos dos sabios. Te gustará lo que descubras.)

1.19.- Las coordenadas en el plano.

Las gráficas se representan por medio de puntos, y **para la representación de puntos en un plano se utilizan los llamados ejes de coordenadas cartesianas.** Se denominan así en honor a René Descartes, sabio que vivió a finales del siglo XVI (1596) hasta la mitad del siglo XVII (1650) y destacó como filósofo, científico y matemático.

Los ejes de coordenadas cartesianas son dos:

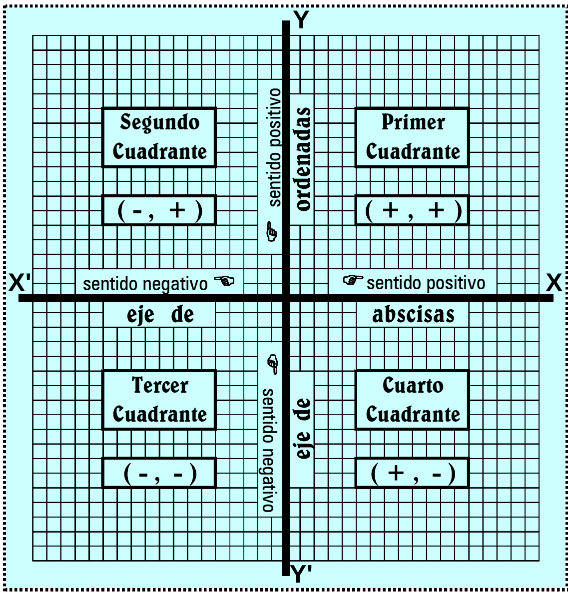
→ Uno horizontal, llamado **eje de abscisas** **(XX')**

→ Otro vertical, llamado **eje de ordenadas** **(YY')**

El punto donde se cortan los dos ejes es llamado origen de coordenadas, que generalmente suele llamarse con la letra **"O"**. Estos ejes dividen al plano en cuatro regiones angulares iguales, a los cuales llamaremos **cuadrantes.** Observa que el orden de los cuadrantes va en sentido contrario a las agujas del reloj. Fíjate en el esquema siguiente

1er cuadrante	→ (+ , +)	→	**(derecha , arriba)**
2^{o} cuadrante	→ (− , +)	→	**(izquierda , arriba)**
3er cuadrante	→ (− , −)	→	**(izquierda , abajo)**
4^{o} cuadrante	→ (+ , −)	→	**(derecha , abajo)**

Los ejes (eje de abscisas y de ordenadas) se dividen en partes iguales, tomadas a partir de un segmento unidad. No tienen por qué ser iguales en los dos ejes, pero sí en cada uno de ellos.



Cada punto que se representa viene definido por **un par de valores,** es decir, por dos números, **llamados coordenadas** de dicho punto. El primer valor **(abscisa),** o sea, el primer número, se representa en el eje de abscisas, si es positivo a la derecha del origen **(O)** y si es negativo a la izquierda. Y el segundo número **(ordenada)** se representa en el eje de ordenadas, si es positivo hacia arriba, por encima del origen **(O),** y si es negativo hacia abajo. Así, por ejemplo, para representar el punto **G (4, -7)** tomaremos 4 unidades a la derecha de **"O"** y 7 unidades por debajo de **"O"**. En cualquier punto, como resumen, podemos decir lo siguiente:

Llamando P, en general, al punto a representar:

- El primero de los dos valores es siempre la abscisa → "x"
- El segundo de los valores es siempre la ordenada → "y"

P (abscisa, ordenada)

P (x, y)

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{abscisa}\begin{Bmatrix} + \rightarrow \text{derecha} \\ - \rightarrow \text{izquierda}\end{Bmatrix},\ \mathbf{ordenada}\begin{Bmatrix} + \rightarrow \text{arriba} \\ - \rightarrow \text{abajo}\end{Bmatrix}\right)$$

{ **Fíjate en la representación de estos puntos en el cuadro de la página siguiente.** } $\mathbf{A}(7,4),\ \mathbf{B}(-1,6),\ \mathbf{C}(-4,-2),\ \mathbf{D}(5,-3)$

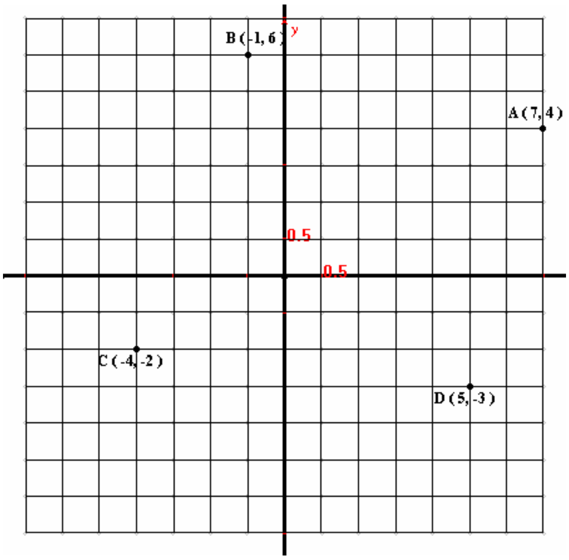
A veces, sobre todo en 1º, hasta tanto no dominan suficientemente la representación gráfica en los ejes de coordenadas, ciertos alumnos tienen fallos cuando alguna/s de las coordenadas definidas en los puntos que hay que representar son nulas, es decir, cuando valen cero (0). Veamos un resumen para ayudarte a no tener esos errores. Ver ejemplos en el cuadro de la pag. siguiente.

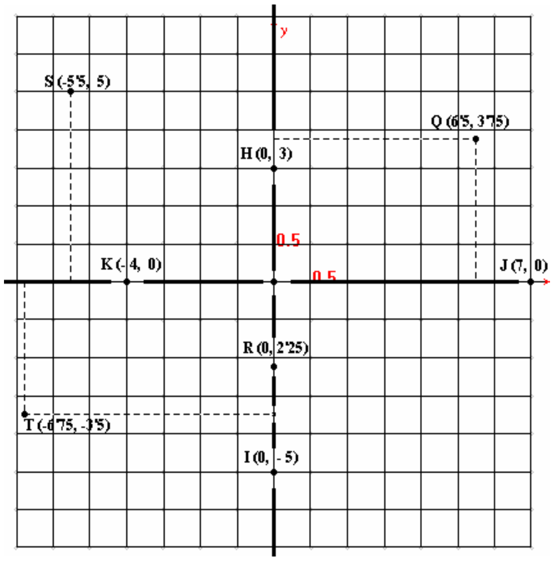
⊗ **Cuando la abscisa es nula, o sea, "x" vale 0 :**
El punto estará situado en el eje de ordenadas
Ejemplos : $\mathbf{H}\ (0,\ 3)\ ;\ \mathbf{I}\ (0,\ -5)$

⊗ **Cuando la ordenada es nula, o sea, "y" vale 0 :**
El punto estará situado en el eje de abscisas.
Ejemplos : $\mathbf{J}\ (7,\ 0)\ ;\ \mathbf{K}\ (-4,\ 0)$

Evidentemente, los valores de las coordenadas no tienen por qué ser siempre enteros, es decir, pueden ser decimales (fraccionarios). Veamos en el gráfico de la derecha de la página siguiente estos puntos :

$$\mathbf{Q}\left(6'5,\ \frac{11}{4}\right);\quad \mathbf{R}\left(\frac{0}{15},\ -2'25\right);\quad \mathbf{S}\left(\frac{-11}{2},\ 5\right);\quad \mathbf{T}\ (-6'75,\ -3'5)$$



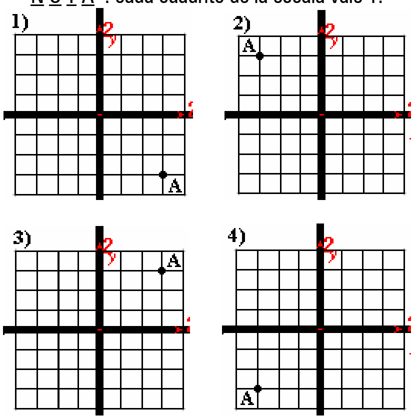


EJERCICIOS RESUELTOS EN LA PÁGINA 27

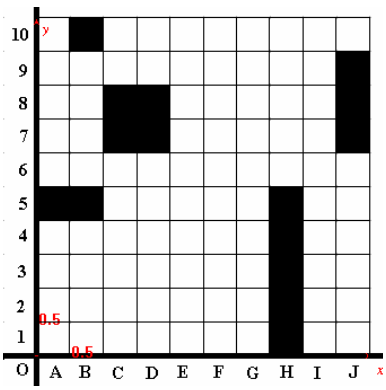
1.- Intenta hacer un esquema de llaves con los conceptos elementales de los ejes de coordenadas cartesianas.

2.- ¿En cuál de los gráficos siguientes está representado el punto **A (– 3, 3)**?

N O T A : cada cuadrito de la escala vale 1.



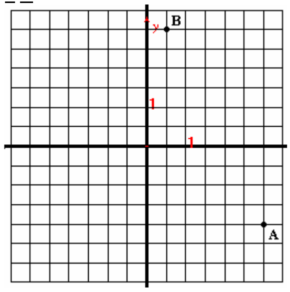
3.- Seguramente habrás jugado alguna vez al juego de los barcos. En él se representan los barcos en cuadritos dentro de un cuadrante de los ejes de coordenadas. ¿Qué tiros harías tú para hundir los barcos de la flota que aparecen en la gráfica?



4.- Entre las siguientes, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos A y B representados?

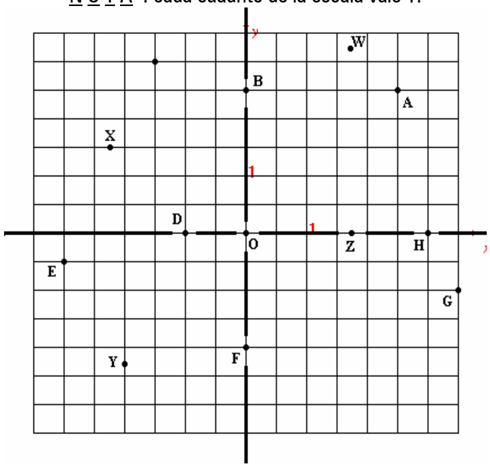
A (- 4, 6) ; A (6, 4) ; A (6, - 4) ; A (4, - 6)
B (- 1, - 6) ; B (1, - 6) ; B (6, 1) ; B (1, 6)

N O T A : cada cuadrito de la escala vale 1.



5.- ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos representados en los ejes siguientes? Hazlo por orden alfabético. ¿Cuáles son los puntos con alguna coordenada decimal? ¿Cuáles son los puntos con alguna coordenada nula?

N O T A : cada cuadrito de la escala vale 1.



6.- Representa en unos ejes de coordenadas los siguientes puntos:

A (– 6, 5) ; B (0, – 4) ; C (7/2, 3) ; D (– 2'5, 0)
E (1, – 2) ; F (– 9/2, – 5'5) ; G (0/8, 6) ,
H (– 8, – 2) ; I (– 6, 1'5) ; J (– 1, 5) .

SOLUCIONES de los 6 ejercicios anteriores

1.- Esquema de llaves.

- Ejes de coordenadas
  - Origen de coordenadas → "O" (0,0)
  - Repres. de un punto → (abscisa, ordenada)
  - Eje horizontal / Eje de abscisas
    - Positivo → A la derecha
    - Negativo → A la izquierda
  - Eje vertical / Eje de ordenadas
    - Positivo → Hacia arriba
    - Negativo → Hacia abajo

2.- El punto A (– 3, 3) corresponde al gráfico nº 2.

3.- Los barcos. Para hundir la flota se deberían hacer los siguientes tiros:

- Barco de 1 cuadro → **B 10.**
- De 2 cuadros → **A 5, B 5.**
- De 3 cuadros → **J 7, J 8, J 9.**
- De 4 cuadros → **C 7, C 8, D 7, D 8.**
- De 5 cuadros → **H 1, H 2, H 3, H 4, H 5.**

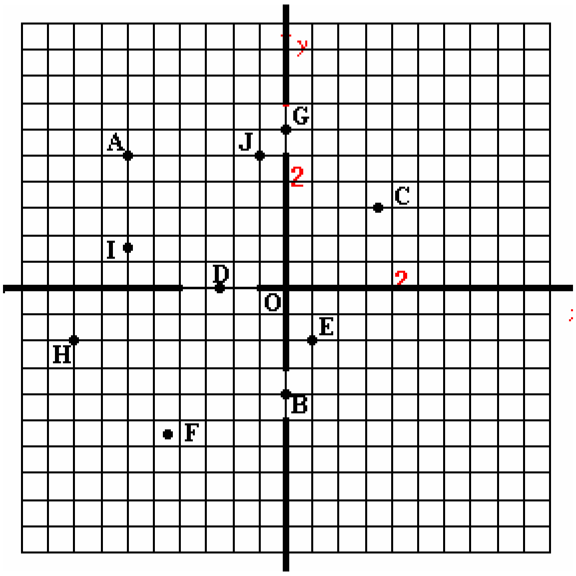
4.- Coordenadas de los puntos A y B.

A (6, – 4) ; B (1, 6)

5.- Coordenadas de los puntos representados por orden alfabético.

**A (5, 5) ; B (0, 5) ; C (– 3, 6) ; D (– 2, 0)
E (– 6, – 1) ; F (0, – 4) ; G (7, – 2) ,
H (6, 0) ; O (0, 0) ; W (3'5, 6'5) ;
X (– 4'5, 3) ; Y (– 4, – 4'5) ; Z (3'5, 0) .**

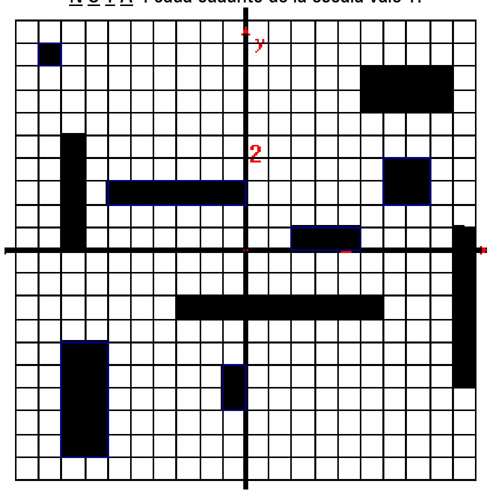
6.- Representa en unos ejes de coordenadas los siguientes puntos:



EJERCICIOS para resolver

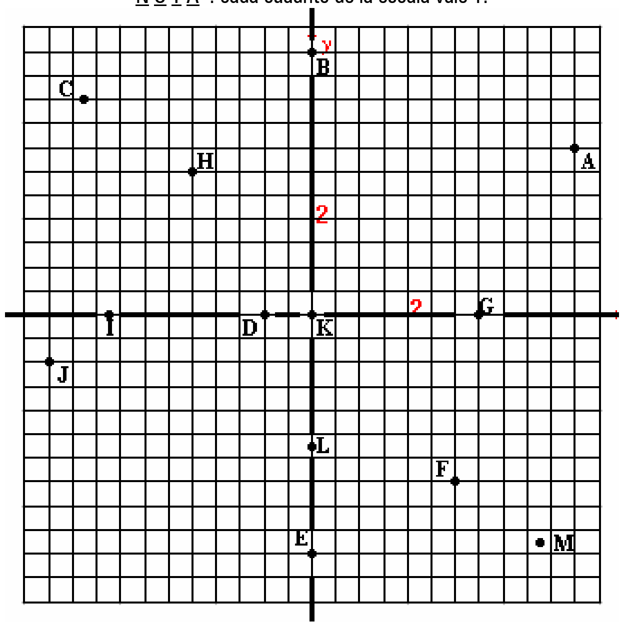
7.- Señala las coordenadas de los cuatro vértices de las figuras sombreadas que tengan alguno de sus valores (x, y) nulos.

NOTA : cada cuadrito de la escala vale 1.



8.- ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos representados en los ejes siguientes? Hazlo por orden alfabético. ¿Cuáles son los puntos con alguna coordenada decimal? ¿Cuáles son los puntos con alguna coordenada nula?

NOTA : cada cuadrito de la escala vale 1.



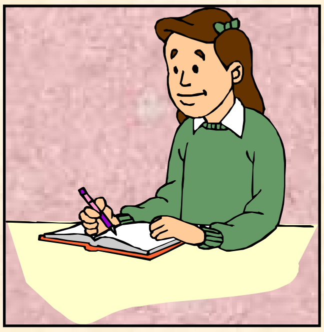
9.- Representa en unos ejes de coordenadas los siguientes puntos:

A (– 3, 7) ; B (0, – 5) ; C (9/2, 8) ; D (– 1'5, 0)

E (6, – 5) ; F (– 5/2, – 8'5) ; G (0/4, 3) .

El objetivo esencial de las fichas de REPASO es, evidentemente, **REPASAR**, es decir, **volver a pasar por un mismo sitio o lugar.** Hay que volver a estudiar o explicar lo que ya se ha dado antes.

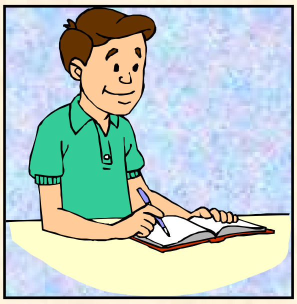
A lo largo de los años que llevas estudiando Matemáticas, habrás observado –si no es así conviene que lo hagas cuanto antes– que la mayoría de la veces cada parte, concepto, ejercicio, lección, tema o evaluación que se va explicando, ejercitando y asimilando se necesita inevitablemente para la que viene a continuación. Y por ello, **cuando se quedan "charcos, lagunas o lagos"** en esas explicaciones y trabajos, o sea, cuando vas quedando partes y/o temas sin comprender y asimilar, entonces **el recorrido** para llegar a saber, dominar y aprobar las "Mate" **se hace cada día más tortuoso, difícil y complicado.** De esa situación se suele pasar a otra de desinterés y rechazo, porque tener ganas de trabajar y estudiar lo que no se comprende ni sabes hacer es muy agotador, desalentador y penoso. Y tarde o temprano conduce a una disposición totalmente en contra de las Matemáticas, e incluso de su profesor. Veamos un ejemplo:



Si en el tema de los Números Enteros no pones la atención debida, no trabajas en clase y en casa con ganas de aprender, no estudias para comprender los conceptos elementales y no repasas de vez en cuando, sucederá que cuando llegues al tema de las Fracciones, o las Potencias, etc., pues evidentemente no lograrás aprender bien esos nuevos temas, porque casi todo lo aprendido en el tema de los Enteros es necesario para los otros. **Es como si tienes que subir por una escalera de 15 ó 20 escalones y a lo largo del trayecto se van rompiendo algunos de ellos; llegará el momento en que sea imposible llegar arriba, porque faltan tantos escalones que ni aun dando grandes saltos lograrías alcanzar el último de ellos.**

Esto que comentamos aquí, para las "Mate", sucede también en algunas otras asignaturas, pero donde más acuciante es el problema, en mi opinión, es en dos de ellas, las más importantes y esenciales en la Educación de cualquier niño, adolescente o joven, a saber, Lengua y Matemáticas.

Llevo años experimentando en muchos alumnos estas fichas de repaso, y cada día me convencen más ellos y me convenzo yo de que son muy prácticas y **ayudan enormemente a aprender lo que ha quedado más flojo, a potenciar lo que se aprendió con normalidad y a adquirir cierto agrado, interés y disfrute hacia las "Mate",** porque os aseguro que hay gente –no sólo mayores o profesores o empollones, sino también alumnos normales– que disfruta aprendiendo Matemáticas; quizás no son los más, sino los menos, pero en todas las clases los hay.



Cuando te mande ejercicios de estas fichas, que como puedes comprobar están resueltos en fichas posteriores, no mires los resueltos hasta que tú no hayas realizado los mandados. **Sirve de poco copiar lo que te mando de las fichas que ya los tienen hechos (solucionados).** Además de que cuando salgas a la pizarra, cuando te pregunte o hagas un control, no vas a tenerlas delante para que te digan lo que has de hacer, y con toda probabilidad de esa forma tendrás asegurado el suspenso (insuficiente de ahora).

Habrá muchas veces que otras fichas de soluciones te ayuden a realizar los ejercicios, y eso sí es válido. Incluso puede suceder, sólo de vez en cuando, que no sepas nada y te ayudes viendo las respuestas o formas de hacerlo, pero cuando necesites hacerlo así, **ten muy en cuenta que el objetivo es aprender, no copiar, y que a menor velocidad te enterarás mejor de lo que no sabes que persiguiendo simplemente el terminar cuanto antes.**

Esta ficha debes releerla de vez en cuando, para que te haga recapacitar. Si así lo haces, recuerda las ideas fundamentales que quiero transmitirte, así irás aprovechando mejor todo. ¡ Ánimo ! Y que te sirva de recordatorio positivo y eficaz.