Tema 3 → LAS FRACCIONES.

OBJETIVOS:

1. Entender el concepto de unidad.
2. Saber comunicar con precisión la información valiéndose de las fracciones y de sus propiedades.
3. Aprender a utilizar las fracciones para representar numéricamente relaciones de proporción.
4. Saber comparar fracciones y números decimales, y usar los símbolos de orden usuales.
5. Aprender a redondear un número decimal.
6. Familiarizarse con el uso de la calculadora.
7. Saber usar técnicas de representación gráfica de fracciones.
8. Incorporar las fracciones a las estrategias de pensamiento personal.
9. Expresar una fracción en forma decimal y obtener la fracción generatriz de un número decimal exacto o periódico.
10. Reconocer y utilizar el concepto de número racional.
11. Saber traducir relaciones de proporción a operaciones con fracciones en problemas y situaciones de la vida cotidiana.

CONTENIDOS:

De conceptos:

1. Definición.
2. Lectura de fracciones.
3. Representación gráfica de fracciones mediante figuras planas y en una línea recta racional.
4. Clases/tipos de fracciones.
5. Amplificación y simplificación de fracciones.
6. Fracción de una cantidad.
7. Reducción de fracciones a común denominador. Método de los productos cruzados y del método del Mínimo Denominador Común (M.D.C.).
8. Ordenación de fracciones.
9. Sumas y restas combinadas de fracciones.
10. Propiedades de la suma de fracciones.
11. Operaciones en las que hay paréntesis y corchetes
12. Producto y división de fracciones.
13. Propiedades del producto.
14. Operaciones combinadas { + , − , . , : , ( ) , [ ] } de fracciones. Prioridad en las operaciones.
15. Problemas sobre fracciones.
16. Detectar errores.
17. Introducción al concepto de número racional.
18. Fracciones generatrices.

Además, como en todos los temas, ejercicios y problemas de repaso de este tema y los anteriores y modelos de controles diversos, con las soluciones correspondientes.

Y, por supuesto, algunas reflexiones.

De procedimientos:

1. Cálculo de fracciones de cantidades numéricas.
2. Representación gráfica de fracciones.
3. Conversión de fracciones mayores que la unidad en números mixtos y viceversa.
4. Ordenación y comparación de fracciones propias e impropias.
5. Determinación de fracciones equivalentes.
6. Simplificación de fracciones.
7. Fracciones cuyo denominador es una potencia de 10.
8. Ordenación y comparación de fracciones.
9. Aproximación del resultado de una división por redondeo.
10. Reducción de fracciones a común denominador.
11. Ordenación y comparación de fracciones mediante sus expresiones decimales.
12. Elección de la aproximación numérica adecuada a una situación concreta.
13. Cálculo de operaciones con fracciones en forma decimal.
14. Cálculo de productos y divisiones de fracciones.
15. Cálculo de expresiones en las que aparecen las cuatro operaciones de fracciones, sin/con paréntesis.
16. Resolución de problemas sobre fracciones.

De actitudes:

1. Actitud receptiva hacia las fracciones.
2. Valoración de la utilidad de las fracciones para representar proporciones numéricamente.
3. Interés en incorporar las fracciones a las estrategias de pensamiento personales.
4. Corrección en el uso de los símbolos de orden al comparar fracciones.
5. Gusto por la presentación ordenada y clara del proceso de cálculo.
6. Actitud positiva hacia las fracciones y los números decimales.
7. Valoración de la validez del redondeo y el control de la aproximación en la estimación de resultados
8. Interés en el dominio del cálculo de operaciones con fracciones.
9. Apreciar la realización de representaciones gráficas de fracciones.
10. Reconocimiento de las relaciones entre el lenguaje gráfico y el lenguaje matemático.

3.1.- Definición.

Estos son los diversos significados de fracción:

❶ División de un todo en partes o parte de un todo.

❷ Cociente indicado de dos números.

❸ Resultado de una medida.

❹ Operador.

---

❶ La fracción como división de un todo en partes.

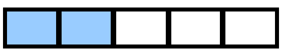
Empecemos diciendo que la forma general en que se expresan las fracciones es del tipo:

$\dfrac{a}{b} \Rightarrow$ al nº de arriba se le llama **NUMERADOR** / al nº de abajo se le llama **DENOMINADOR**

Así que los dos términos de una fracción son el numerador y el denominador.

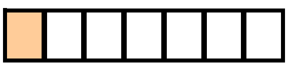
Cuando decimos que la fracción tiene como significado la división de un todo en partes, queremos decir que **dividimos** el todo, es decir, **la unidad de referencia** (una tarta, un chocolate, un campo de juego, una clase, el sueldo de una persona, los habitantes de una población, etc.), **en tantas partes como indica** el número escrito abajo (**el denominador**) **y** que **cogemos**/tomamos/elegimos **las partes que indica** el número de arriba (**el numerador**).

Veamos algunos ejemplos:

a) 

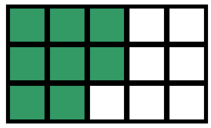
→ $\dfrac{\text{se cogen 2 partes (numerador)}}{\text{se divide en 5 partes } \textit{iguales} \text{ (denominador)}} = \dfrac{2}{5}$

---

b) 

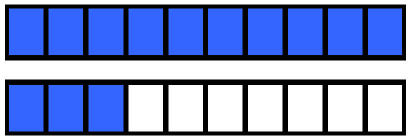
→ $\dfrac{1}{7}$ (tomo una de esas partes) / (divido en siete partes iguales)

---

c) 

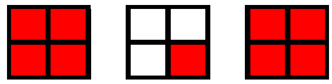
→ $\dfrac{8}{15}$ (tomo ocho de esas partes) / (divido en quince partes iguales)

---

d) 

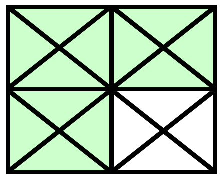
→ $\dfrac{13}{10}$ (tomo trece de esas partes) / (divido cada unidad en diez partes iguales)

---

e) 

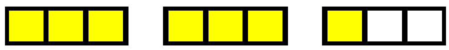
→ $\dfrac{9}{4}$ (tomo nueve de esas partes) / (divido cada unidad en cuatro partes iguales)

---

f) 

→ $\dfrac{12}{16}$ (tomo doce de esas partes) / (divido cada unidad en dieciseis partes iguales)

---

g) 

→ $\dfrac{7}{3}$ (tomo siete de esas partes) / (divido cada unidad en tres partes iguales)

---

❷ La fracción como cociente indicado de dos números.

Toda fracción tiene como resultado el cociente de la **división entre el numerador** (actúa de dividiendo) **y el denominador** (actúa de divisor). Veamos ejemplos con las mismas fracciones anteriores:

a)	$\dfrac{2}{5} = 0'4$	→	2 dividido entre 5 da 0'4
b)	$\dfrac{1}{7} = 0'1428\ldots$	→	1 dividido entre 7 da 0'14...
c)	$\dfrac{8}{15} = 0'5\widehat{3}$	→	8 dividido entre 15 da $0'5\widehat{3}$
d)	$\dfrac{13}{10} = 1'3$	→	13 dividido entre 10 da 1'3
e)	$\dfrac{9}{4} = 2'25$	→	9 dividido entre 4 da 2'25
f)	$\dfrac{12}{15} = 0'8$	→	12 dividido entre 15 da 0'8

❸ La fracción como resultado de una medida.

La fracción suele usarse en multitud de ocasiones **para expresar medidas**. Ejemplos:

a) 3/8 del largo de la habitación. Con lo que dividiríamos en ocho partes la medida de esa dimensión y tomaríamos tres de esas partes.

b) La cuarta parte (1/4) del camino. Se divide el camino en cuatro partes y se toma una.

c) A dos quintos (2/5) del techo. Se divide la altura de esa sala en cinco partes iguales y se toman dos.

❹ La fracción como operador.

En la mayoría de las operaciones en las que intervienen las fracciones lo hacen como operadores, es decir, como maquinitas que hacen dos operaciones a las cantidades o expresiones que se operan. O sea, **multiplican por el numerador y dividen entre el denominador. O lo que es lo mismo: dividen entre el denominador y multiplican por el numerador**. Ejemplos:

a) $\frac{4}{7}$ de 210 euros $= \frac{4 . 210}{7} = \frac{840}{7} = 120$ €

b) $\frac{1}{8}$ de 2'4 $= \frac{1 . 2'4}{8} = \frac{2'4}{8} = 0'3$

c) $\frac{5}{2}$ de 35 metros $= \frac{5 . 35}{2} = \frac{175}{2} = 87'5$ m

d) $\frac{2}{3}$ de 5 docenas de huevos $= \frac{2.5.12}{3} = \frac{120}{3} = 40$ h.

3.2.- Lectura de fracciones.

Para leer fracciones ten en cuenta estas normas:

a) Se leen empezando por el numerador, tal y como está escrito.

b) Se sigue por el denominador, de la siguiente manera:

Si pone **un 1**: $\frac{7}{1}$ → Se lee "siete **partido por uno**".

Si pone **un 2**: $\frac{9}{2}$ → Se lee "nueve **medios**".

Si pone **un 3**: $\frac{12}{3}$ → Se lee "doce **tercios**".

Si pone **un 4**: $\frac{3}{4}$ → Se lee "tres **cuartos**".

Si pone **un 5**: $\frac{1}{5}$ → Se lee "un **quinto**".

Si pone **un 6**: $\frac{6}{6}$ → Se lee "seis **sextos**".

Si pone **un 7**: $\frac{8}{7}$ → Se lee "ocho **séptimos**".

Si pone **un 8**: $\frac{2}{8}$ → Se lee "dos **octavos**".

Si pone **un 9**: $\frac{6}{9}$ → Se lee "seis **novenos**".

Si pone **un 10**: $\frac{4}{10}$ → Se lee "cuatro **décimos**".

A partir de 10 en el denominador se lee añadiendo **la terminación "avos"** al número indicado en el denominador. Veamos:

Si pone **un 11**: $\frac{52}{11}$ → Se lee {"cincuenta y dos **onceavos**"

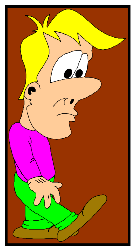
Si pone **un 12**: $\frac{1}{12}$ → Se lee {"un **doceavos**"

Si pone **un 13**: $\frac{104}{13}$ → Se lee {"cientocuatro **treceavos**"

Si pone **un 37**: $\frac{3}{37}$ → Se lee {"tres treinta **y sieteavos**"

Si pone **un 602**: $\frac{5}{602}$ → Se lee {"cinco seiscien-**tos dosavos**"

Un/a chico/a tiene una buena autoestima si tiene frecuentemente una buena presencia de ánimo, si se siente orgulloso de sus acciones, si valora a sus amigos y se siente él/ella valorado, si acepta los fracasos, si actúa con independencia, si emprende nuevos propósitos y empresas con ganas, si actúa seguro de sí mismo y no le cuesta tomar responsabilidades, si influye en otras personas y muestra sus emociones y sentimientos.



Por el contrario, un/a chico tiene una baja o escasa autoestima si evita sucesos y acontecimientos que le causan incertidumbre y angustia, si no aprecia sus dotes naturales, si suele culpar a los demás de casi todas las cosas o situaciones que le suceden, si se deja influir con mucha facilidad por otros, si siente que los demás no le tienen en cuenta ni le estiman, si casi siempre está *"con la mosca detrás de la oreja"*, si se siente habitualmente incompetente, torpe o inútil, si es incapaz de dar a conocer sus opiniones, de manifestar sus sentimientos y de sentirse exteriormente emocionado.

La mayoría de las personas tenemos aspectos tanto de una parte como de otra. Y a veces a los que poseen una buena autoestima se les baja o a los que la tienen poca se les sube. **Examínate a ti mismo, reflexio-nando sobre los aspectos descritos anteriormente, a ver si te acercas más a una buena o a una escasa autoestima.**

3.3.- Representación gráfica de fracciones.

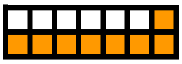
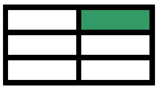
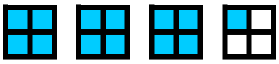
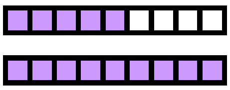
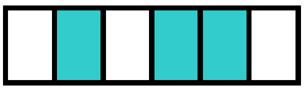
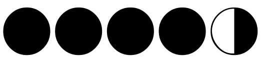
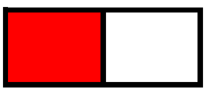
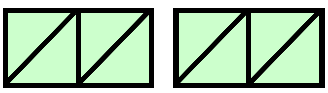
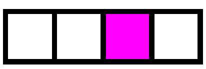
La podemos hacer de dos formas:

a) Consiste en elegir figuras planas conocidas, dividirlas en tantas partes iguales como indica el denominador y tomar/dibujar las partes que indica el numerador.

b) En una línea recta. Esta línea se llama línea recta racional, concepto que explicaremos más adelante. Se trata de dividir la recta en unidades a izquierda y derecha del origen (0), teniendo en cuenta que estas divisiones deben ser todas iguales. Después hay que subdividir (volver a dividir) cada una de esas unidades (partes enteras) en tantas partes como indica el denominador de la fracción a representar, y tomar/señalar las partes que indica el numerador.

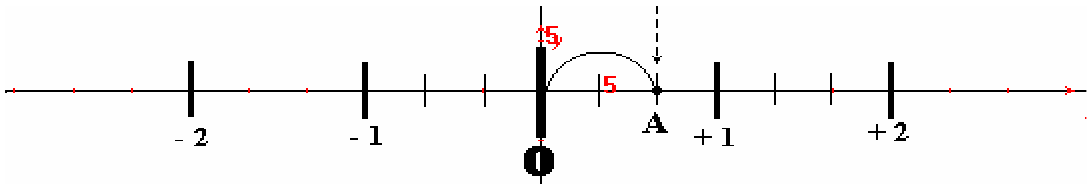
En esta tabla de ejercicios se ha hecho la representación de la forma a), es decir, con figuras planas.

Observa cómo está realizado el primer ejercicio y resuelve de la misma forma en tu cuaderno los que te vaya mandando en días sucesivos.

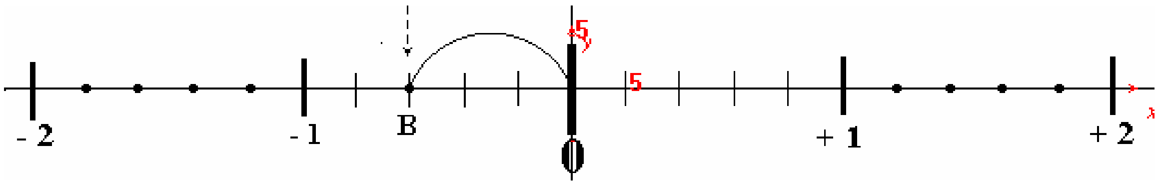
	Partes tomadas, o sea, rayadas.	Partes en que se ha dividido cada unidad.	La fracción representada es:	¿Numerador? ¿Denominador?	Se lee:
1) 	8	14	$\frac{8}{14}$	N ⇨ 8 D ⇨ 14	"ocho catorceavos"
2) 					
3) 					
4) 					
5) 					
6) 					
7) 					
8) 					
9) 					
10) 					

A continuación, ejemplos y ejercicios de la forma b), o sea, en una recta racional. Observa que **todas las divisiones en una misma línea recta son iguales**; sin embargo, en rectas distintas pueden ser divisiones de medidas diferentes. Es cuestión de adaptarse al lugar donde se va a representar y de lo mayor o menor que sea el denominador. Si el denominador es pequeño, las divisiones en tu cuaderno puedes tomarlas de dos en dos cuadritos, pero si es mayor (12, 15, etc.) deberás tomarlas de un cuadrito; o si es demasiado alto (75, 120, 356, etc.) tomas cada cuadrito de tu cuaderno como valor de 5, ó 10, ó 15, ó 20, etc., según te convenga, y así adaptas la escala a la fracción dada.

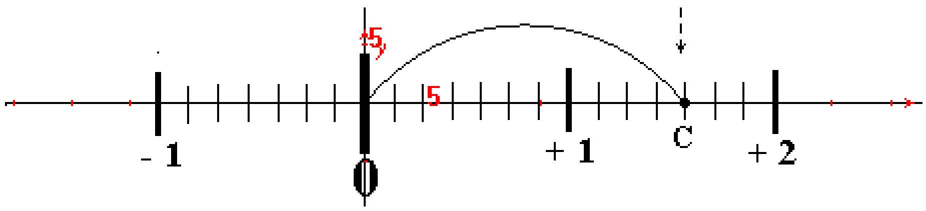
1) El punto "A" representa a la fracción $+\frac{2}{3}$, o desde el origen (0) hasta el punto "A" corresponde a $+\frac{2}{3}$.



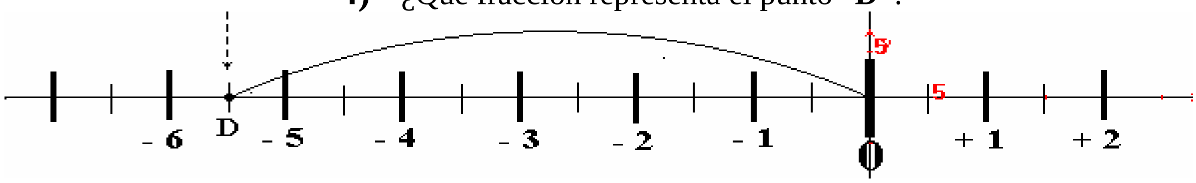
2) El punto "B" representa a la fracción $-\frac{3}{5}$, o desde el origen (0) hasta el punto "B" corresponde a $-\frac{3}{5}$.



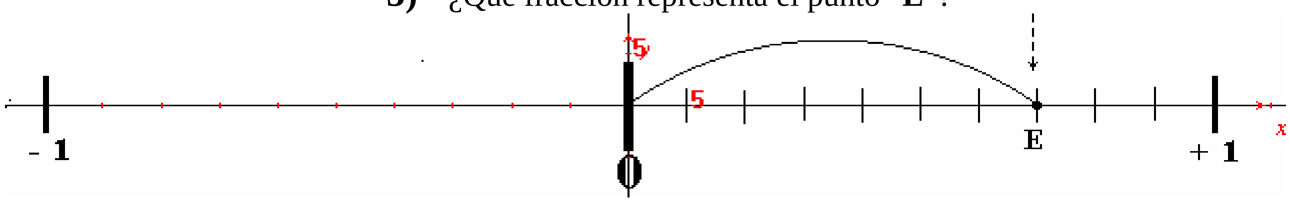
3) ¿Qué fracción representa el punto "**C**", o lo que es lo mismo**:** la distancia del origen hasta "c"?



4) ¿Qué fracción representa el punto "**D**"?



5) ¿Qué fracción representa el punto "**E**"?



6) Representa las siguientes fracciones de las dos formas, es decir, en barras o cuadritos de figuras planas y en una línea recta racional.

a) $\frac{3}{8}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{7}{-3}$ d) $\frac{6}{+2}$ e) $\frac{-10}{-7}$ f) $\frac{5}{9}$ g) $\frac{0}{5}$ h) $\frac{-13}{6}$

3.4.- Clases/tipos de fracciones.

① Fracciones ➠ **PROPIAS.**

② Fracciones ➠ **IMPROPIAS.**

③ Fracciones ➠ **IGUALES A LA UNIDAD.**

④ Fracciones ➠ **NÚMEROS MIXTOS.**

⑤ Fracción ➠ **OPUESTA.**

⑥ Fracción ➠ **INVERSA.**

⑦ Fracciones ➠ **DECIMALES.**

⑧ Fracciones ➠ **EQUIVALENTES.**

---

① Fracciones **PROPIAS** son aquellas en las que el numerador es menor que el denominador. Al tomar menos partes de las que se divide a la unidad, las fracciones propias son menores que la unidad.

EJEMPLOS :

a) $\frac{1}{4} < 1 \rightarrow$ porque $1 : 4 = 0'25 < 1$

b) $\frac{7}{12} < 1 \rightarrow$ porque $7 : 12 = 0'58\overset{\frown}{3} < 1$

c) $\frac{5}{9} < 1 \rightarrow$ porque $5 : 9 = 0'\overset{\frown}{5} < 1$

$\frac{1}{4}$, $\frac{7}{12}$ y $\frac{5}{9}$ son fracciones propias.

---

② Fracciones **IMPROPIAS** son aquellas en las que el numerador es mayor que el denominador. Al tomar más partes de las que se divide a la unidad, las fracciones propias son mayores que la unidad.

EJEMPLOS :

d) $\frac{3}{2} > 1 \rightarrow$ porque $3 : 2 = 1'5 > 1$

e) $\frac{11}{6} > 1 \rightarrow$ porque $11 : 6 = 1'8\overset{\frown}{3} > 1$

f) $\frac{18}{3} > 1 \rightarrow$ porque $18 : 3 = 6 > 1$

$\frac{3}{2}$, $\frac{11}{6}$ y $\frac{18}{3}$ son fracciones impropias.

---

③ Fracciones **IGUALES A LA UNIDAD** son aquellas que tienen numerador y denominador iguales. En realidad, podemos decir que éstas no son propiamente fracciones, porque en lugar de tomar una parte de un todo tomamos todo.

EJEMPLOS :

g) $\frac{8}{8} = 1 \rightarrow$ porque $8 : 8 = 1$

h) $\frac{15}{15} = 1$; i) $\frac{304}{304} = 1$

$\frac{8}{8} = \frac{15}{15} = \frac{304}{304} = \mathbf{1}$

---

④ Los **NÚMEROS MIXTOS** son expresiones que tienen una parte entera y otra parte fraccionaria (decimal). Se utilizan poco, pero es conveniente que los conozcas para cuando en algunas operaciones o problemas expresen cantidades con números mixtos (mezcla de parte entera y fracción) calcules de forma correcta.

☞ Para transformar un número mixto en fracción, se multiplica el entero por el denominador, se le suma el numerador y el resultado es el numerador de la nueva fracción; el denominador se mantiene siempre el mismo.

☞ Para transformar una fracción en número mixto, se divide el numerador entre el denominador, se coloca el cociente como entero, el resto en el numerador y el denominador siempre el mismo.

EJEMPLOS:

En unos se da un número mixto y se transforma en fracción, y en otros se da una fracción (impropia) que se trasforma en número mixto.

j) $3\frac{1}{4} \rightarrow$ Se lee $\rightarrow$ "Tres un cuarto"

3 enteros (unidades) y (+) $\frac{1}{4}$

$3\frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{13}{4} = 3'25$

"Tres un cuarto" es igual a "trece cuartos".

k) $\frac{9}{5}$ ⇔ $\begin{array}{r|l} 9 & 5 \\ \hline 4 & 1 \end{array}$ ⇔ $1\frac{4}{5}$

"Nueve quintos" es igual a "uno cuatro quintos".

ℓ) $\frac{23}{6}$ ⇔ $\begin{array}{r|l} 23 & 6 \\ \hline 5 & 3 \end{array}$ ⇔ $3\frac{5}{6}$

"Veintitrés sextos" es igual a "tres cinco sextos".

m)
- $5\frac{2}{7}$ → Se lee → "Cinco dos séptimos"
- 5 enteros (unidades) y (+) $\frac{2}{7}$
- $5\frac{2}{7} = \frac{5\cdot 7 + 2}{7} = \frac{37}{7} = 5'28\ldots$
- "Cinco dos séptimos" = "treinta y siete séptimos".

---

⑤ La fracción **OPUESTA** de una fracción dada es otra fracción con sus mismos términos pero de signo contrario.

n) $\frac{6}{11}$ → su opuesta es → $\frac{-6}{11}$

NOTA : cuando una fracción es negativa, el signo se puede colocar en el numerador, en la fracción (es decir, en el medio, a la izquierda de la raya de fracción), o en el denominador. Yo te aconsejo mejor ponerlo en el numerador. Así que :

$$\frac{-6}{11} = -\frac{6}{11} = \frac{6}{-11}$$

ñ) $\frac{-7}{8}$ → su opuesta es → $\frac{7}{8}$

o) $\frac{-1}{-4}$ → su opuesta es → $\frac{-1}{4}$

p) $\frac{5}{-12}$ → su opuesta es → $\frac{5}{12}$

---

⑥ La fracción **INVERSA** de una fracción dada es otra fracción del mismo signo pero con sus términos cambiados. No es nada raro confundir la fracción opuesta con la inversa. **Recuerda: en la opuesta sólo cambia el signo y en la inversa sólo los términos.** Otra cosa sería si te piden al mismo tiempo la opuesta y la inversa, que entonces hay que cambiar los signos y los términos.

q) $\frac{2}{5}$ → su inversa es → $\frac{5}{2}$

r) $\frac{1}{-6}$ → su inversa es → $\frac{-6}{1} = -6$

s) $\frac{-10}{-9}$ → su inversa es → $\frac{9}{10}$

t) $-\frac{3}{4}$ → su inversa es → $\frac{-4}{3}$

---

⑦ Fracciones **DECIMALES** son las que tienen como denominadores la unidad seguida de ceros, o sea, 10, 100, 1.000, 10.000, etc.

¿Cómo convertir fracciones decimales en números decimales?

Para pasar fracciones decimales a números decimales basta con recordar el concepto de fracción como cociente de dos números. En este caso, como los denominadores son siempre números con la unidad seguida de ceros, se trata de dividir los numeradores por la unidad seguida de ceros, que se hace colocando la coma a la izquierda del numerador tantos lugares como ceros hay.

¿Cómo convertir números decimales en fracciones decimales?

Para pasar expresiones decimales –*sólo trataremos ahora los números decimales limitados, ya que existen también números decimales ilimitados, que veremos más adelante*– a fracciones decimales pondremos como numerador el número sin la coma y como denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga.

A continuación, ejemplos resueltos de los dos tipos: de fracciones decimales a números decimales (del ejemplo **"u"** hasta el **"a"**) y viceversa (del **"b"** al **"f"**).

u) $\frac{1}{10} = 0'1$ → una décima.

v) $\frac{3}{100} = 0'03$ → tres centésimas.

w) $\frac{27}{1000} = 0'027$ → veintisiete milésimas.

x) $\frac{451}{100} = 4'51$ → cuatro enteros y cincuenta y una centésimas.

y) $\frac{1}{1000000} = 0'000001$ → una millonésima.

z) $\frac{2308}{10} = 230'8$ → doscientos treinta enteros y ocho décimas.

a) $\frac{75}{10000} = 0'0075$ → setenta y cinco diezmilésimas.

b) $3'87 = \frac{387}{100}$ → tres enteros y ochenta y siete centésimas

c) $62'8 = \frac{628}{10}$ → sesenta y dos enteros y ocho décimas.

d) $0'004 = \frac{4}{1000}$ → cuatro milésimas

e) $0'00039 = \frac{39}{100000}$ → treinta y nueve cienmilésimas.

f) $4069'5 = \frac{40695}{10}$ → cuatro mil sesenta y nueve enteros y cinco décimas.

⑧ **F**racciones **EQUIVALENTES.** Dos fracciones son equivalentes si, teniendo términos distintos, tienen el mismo valor. Hay una regla para saberlo: **multiplicar sus términos en cruz, y si se obtiene el mismo resultado serán equivalentes, si no es así, son distintas**. En realidad, **si dos fracciones son equivalentes representan la misma parte del todo**; tienen distintos números en sus términos (numeradores y denominadores) pero son iguales, y lo comprobaremos si las representamos. (En la siguiente pregunta veremos cómo obtener fracciones equivalentes a una dada. Utilizaremos dos métodos: **AMPLIFICACIÓN y SIMPLIFICACIÓN**)

☞ Comprobación gráfica de que las fracciones equivalentes representan la misma parte, es decir, valen lo mismo.

➢ **D**espués de haber explicado su profesor algunos temas correspondientes a las fracciones, un grupo de amigas/os discuten sobre quién ha comido más chocolate y quién menos. Todos habían comprado una barra de la misma marca, de la misma calidad y el mismo tamaño. Las partes respectivas de cada una de sus barras que habían comido cada uno/a fueron las siguientes:

ANICETO ☞ 5/15 GLORIA ☞ 1/3 PEDRO ☞ 20/60 SUSANA ☞ 2/6 SERGIO ☞ 10/30 VICTORIA ☞ 4/12

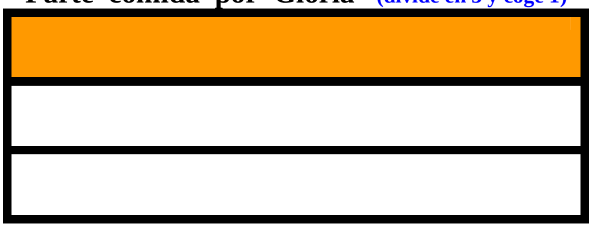
Susana le dice a Pedro: *- Te has puesto "morao" de chocolate . Te dolerá mucho la barriga, ¿no?*
Interviene Aniceto: *- Es que eres muy glotón; así tienes de kilos.*
Y Pedro les contesta: *- Pues yo os apuesto un bombón a que no soy el que más ha comido. Hagamos cuentas.*
Gloria lo tiene muy claro: *- De lo que estoy segura es de que yo he comido menos que nadie, sólo 1/3 de mi barra.*

¿Quién comió más y quién menos de cada una de sus barras de chocolate? Bien, te ayudaré; basta sólo mirar los gráficos de la parte inferior de esta página y comprobar que todos/as comieron exactamente igual. O sea, comieron la TERCERA PARTE DE CADA UNA DE SUS BARRAS, ni más ni menos. En realidad, las fracciones que comieron cada una/o son EQUIVALENTES, es decir, que aunque sus términos (numerador y denominador) sean distintos, la parte que corresponde a cada fracción referida a una unidad (una barra de chocolate) es en todas idéntica. Observando un poco más detenidamente las fracciones propuestas, apreciamos que ordenándolas por términos de menores a mayores se han ido obteniendo por amplificación. Veamos:

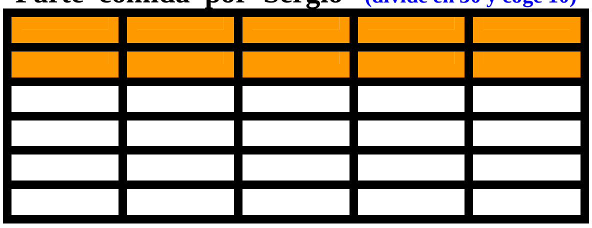
Parte comida por Aniceto (divide en 15 y coge 5)

Parte comida por Susana (divide en 6 y coge 2)

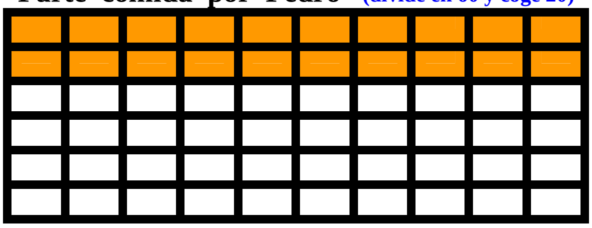
Parte comida por Gloria (divide en 3 y coge 1)



Parte comida por Sergio (divide en 30 y coge 10)



Parte comida por Pedro (divide en 60 y coge 20)



Parte comida por Victoria (divide en 12 y coge 4)

A continuación puedes comprobar numéricamente cómo **las seis fracciones son EQUIVALENTES**, y que de cualquiera de ellas se pueden obtener las demás por amplificación o simplificación**.** O sea**,** que queda claro que todos comieron la misma parte de tarta**.**

$$\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1\,.\,2}{3\,.\,2} = \frac{2}{6}\ ; \rightarrow \frac{1\,.\,4}{3\,.\,4} = \frac{4}{12}\ ; \rightarrow \frac{1\,.\,5}{3\,.\,5} = \frac{5}{15}\ ; \rightarrow \frac{1\,.\,10}{3\,.\,10} = \frac{10}{30}\ ; \rightarrow \frac{1\,.\,20}{3\,.\,20} = \frac{20}{60}\ ; \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \frac{10}{30} = \frac{20}{60}$$

EJEMPLOS :

Ejercicios resueltos sobre fracciones equivalentes:

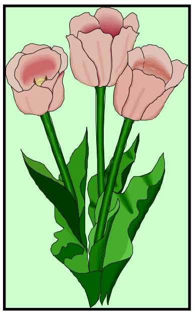
a) $\left\{ \frac{4}{5} = \frac{8}{10} \right\} \to 4.10 = 5.8 \to 40 = 40 \to$ Sí son equivalentes.

b) $\left\{ \frac{10}{6} \neq \frac{8}{5} \right\} \to 10.5 \neq 6.8 \to 50 \neq 48 \to$ No son equivalentes.

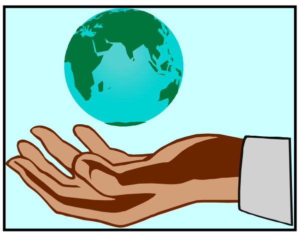
c) $\left\{ \frac{3}{7} \neq \frac{5}{12} \right\} \to 3.12 \neq 7.5 \to 36 \neq 35 \to$ No son equivalentes.

d) $\left\{ \frac{6}{3} = \frac{8}{4} \right\} \to 6.4 = 3.8 \to 24 = 24 \to$ Sí son equivalentes.

Hay una palabra cuyo significado suele depender mucho de la persona que la dice. Esa palabra es FELICIDAD.



Para unos la felicidad es
tener algo que comer cada día,
para otros es tener agua,
para otros es tener salud,
para otros es no estar solo,
para otros es tener alguien que le sonría y le quiera,
para otros es tener familia,
para otros es tener buenos amigos,
para otros es poder disfrutar de la naturaleza,
para otros es sacar buenas notas,
para otros es no tener que estudiar,
para otros es levantarse tarde,
para otros es no tener que hacer nada,
para otros es tener dinero,
para otros es hacer siempre lo que le apetece,
para otros es tener poder,
para otros es disponer de drogas,
para otros ...
o para unos varias de esas cosas antes citadas.



¿ Qué es para ti LA FELICIDAD ?

¿ Te lo has planteado alguna vez ?

Aunque a tu edad no suele uno reflexionar sobre estas cosas, no está de más activar un poco tus neuronas –busca en el diccionario si no entiendes– y pensar qué horizontes, qué fines y qué caminos tiene la felicidad para ti.

EJERCICIOS DE REPASO

Los apartados "a", "b" y "c" de los ejercicios 1 al 13 están resueltos en las páginas 176, 177 y 178.

1.- Teoría.

a) ¿Cómo se solía llamar antes a las fracciones?
b) ¿Cuáles son las fracciones cuyo cociente es siempre 0'algo (cero coma algo)?
c) ¿Por qué se dice que la fracción actúa como un operador?
d) ¿Cómo se llaman las fracciones que al representarlas debemos hacerlo con más de una unidad?

2.- Escribe la lectura de las fracciones dadas (ver pág. 89).

a) $\frac{11}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{0}{8}$, $\frac{5}{2}$ y $\frac{4}{38}$
b) $\frac{0}{2}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{13}{0}$ (i) , $\frac{23}{106}$
c) $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{81}$, $\frac{10}{10}$ y $\frac{6}{53}$
d) $\frac{0}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{45}{235}$ y $\frac{20}{173}$

3.- Escribe las fracciones que te piden (ver pág. 89).

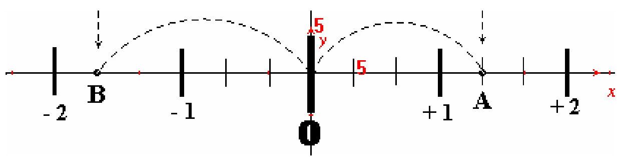
a) Dos décimos y doce treintaavos.
b) Setenta y dos treceavos y tres octavos.
c) La duodécimaparte y un séptimo.
d) Quince ciento tresavos y la milésima parte.

4.- Realiza la representación gráfica de las fracciones dadas de las dos formas explicadas, es decir, en forma de barras o cuadritos con figuras planas y en una recta racional (ver páginas 88, 90 y 91).

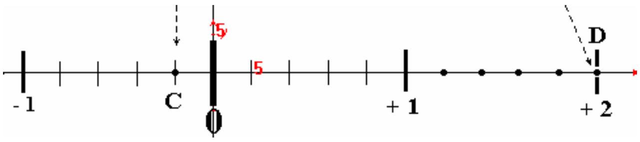
a) $\frac{6}{8}$, $\frac{-1}{5}$ y $\frac{7}{3}$
b) $\frac{-1}{-4}$, $\frac{8}{6}$ y $\frac{13}{-2}$
c) $-\frac{10}{5}$, $\frac{-2}{10}$ y $\frac{1}{7}$
d) $\frac{3}{9}$, $\frac{15}{-6}$ y $\frac{4}{2}$

5.- ¿Qué fracciones corresponden a las siguientes representaciones (ver pág. 91)?

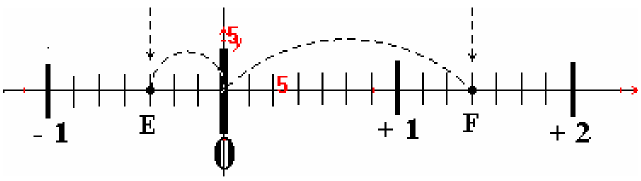
a) Fracciones que representan los puntos **A** y **B**.



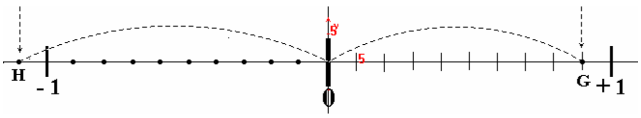
b) Fracciones que representan los puntos **C** y **D**.



c) Fracciones que representan los puntos **E** y **F**.

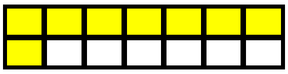


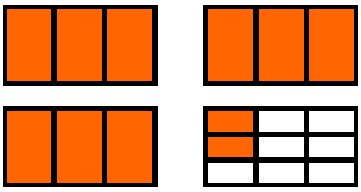
d) Fracciones que representan los puntos **G** y **H**.

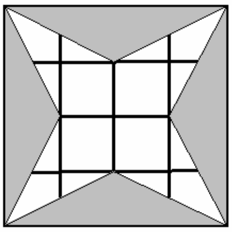


6.- ¿Qué fracciones corresponden a las siguientes representaciones? (ver pág. 88) Nota: en cada apartado hay tres representaciones.

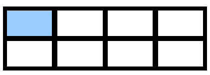
---

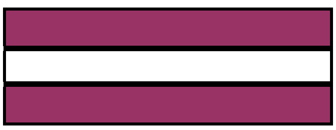
a – I → 

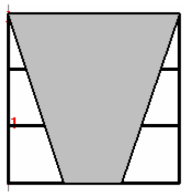
a – II → 

a – III → 

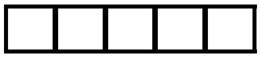
---

b – I → 

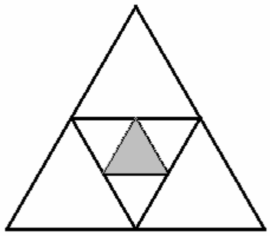
b – II → 

b – III → 

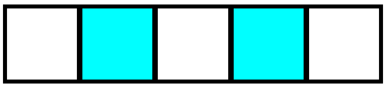
---

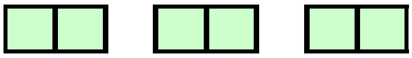
c – I → 

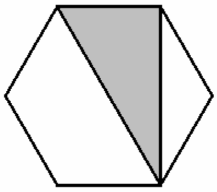
c – II → 

c – III → 

---

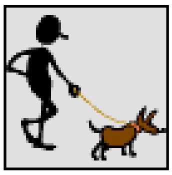
d – I → 

d – II → 

d – III → 

✂✂✂✂✂✂✂✂✂✂✂✂✂

Conversaciones de un grupo de amigos, quizás un poco **'raros'** para la época actual:



VALERIA: *"A mí no me parece mal tener animales en casa, como los perros, pero lo que no veo nada bien es sacarlos para que hagan sus deyecciones en las aceras o en parques".*

SERGIO:*"En bastantes ocasiones me encuentro sorprendido desagradablemente al oír conversaciones a grito limpio entre personas que van juntas, como si de aullidos se tratara; y sobre todo las madrugadas de fines de semana".*

IRENE: *"Y las bandas de algunos jóvenes que parece que disfrutan –a lo peor de verdad se regocijan– dando voces, golpes, etc., a altas horas de la madrugada sin respeto alguno al descanso de los demás".*

¿ Cosas raras, o Urbanidad, buenos modales, buenas costumbres y buena educación ?

✌✌✌✌✌✌✌✌✌✌✌✌✌✌✌✌✌✌

7.- En cada apartado debes decir qué fracciones son propias, cuáles impropias y cuáles iguales a la unidad (ver página 93).

a) $\frac{18}{20}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{12}{7}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{25}{9}$, $\frac{35}{35}$.

b) $\frac{1}{2}$, $\frac{10}{10}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{20}{13}$, $\frac{2}{6}$.

c) $\frac{25}{25}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{306}{306}$, $\frac{21}{10}$.

d) $\frac{60}{8}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{85}{85}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{10}{9}$.

8.- En cada apartado hay un número mixto para que lo conviertas en fracción y una fracción para que la conviertas en número mixto (ver páginas 93 y 94).

a) $5\frac{1}{3}$ y $\frac{7}{2}$.

b) $4\frac{3}{10}$ y $\frac{23}{6}$.

c) $1\frac{5}{8}$ y $\frac{6}{11}$.

d) $12\frac{6}{9}$ y $\frac{35}{10}$.

9.- En cada apartado hay tres fracciones. La 1ª para que pongas su opuesta, la 2ª para que pongas su inversa y la 3ª para que, al mismo tiempo, pongas su opuesta e inversa (ver página 94).

a) $\frac{3}{9}$, $\frac{-2}{7}$ y $\frac{-10}{-4}$.

b) $-\frac{1}{4}$, $\frac{30}{5}$ y $\frac{6}{-5}$.

c) $\frac{-8}{10}$, $\frac{5}{8}$ y $-\frac{-1}{12}$.

d) $-\frac{7}{-14}$, $\frac{6}{-6}$ y $\frac{9}{2}$.

10.- En cada apartado aparece una fracción decimal y un número decimal. Debes convertir la fracción en número decimal y el número decimal en fracción. Y en cada una/o escribir cómo se lee en forma decimal (ver página 94).

a) $\frac{6}{100}$ y 9'005.

b) $\frac{708}{10}$ y 0'57.

c) $\frac{12}{1000000}$ y 8903'2.

d) $\frac{6784}{1000}$ y 0'000082.

11.- Debes averiguar si los pares de fracciones que te dan son equivalentes o no (ver páginas 94 y 95).

a) $\left\{\frac{12}{6} \text{ y } \frac{4}{2}\right\}$; $\left\{\frac{-3}{45} \text{ y } \frac{6}{-90}\right\}$

b) $\left\{\frac{24}{-30} \text{ y } \frac{8}{10}\right\}$; $\left\{\frac{-10}{12} \text{ y } -\frac{7}{-2}\right\}$

c) $\left\{\frac{16}{4} \text{ y } \frac{12}{3}\right\}$; $\left\{\frac{15}{14} \text{ y } \frac{8}{7}\right\}$

d) $\left\{\frac{60}{40} \text{ y } \frac{15}{-10}\right\}$; $\left\{\frac{25}{-4} \text{ y } \frac{-50}{8}\right\}$

12.- Cuestiones o problemas **I**.

a) Victoria le dijo a su hermano Sergio que se comió los 7/5 de la tarta de cumpleaños. ¿Qué tienes que decir al respecto?
b) ¿Qué operación hace la fracción 0/5 a la cantidad 20 € ?
c) ¿Cómo se lee la fracción 15/0 ? (¡)
d) Representa la fracción – 0 / 4.

13.- Cuestiones o problemas **II**.

a) ¿Cuál es la inversa de la fracción 7/0? (¡)
b) ¿Cómo se escribe un billón?
c) ¿Cuántos trillones de moléculas hay en una simple gota de agua? Escribe esa cantidad con todas sus cifras.
d) Una muy difícil. El 1º ó la 1ª que me explique correctamente la diferencia entre fracción y número racional obtiene una recompensa de 3 ✳.

☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆

En bastantes aulas de muchos centros educativos de la época en que vivimos hay alumnos dotados de capacidades y talentos superiores o muy superiores a los que la sociedad actual considera como normal. Basta preocuparse un poco por este hecho para constatar que es indudable, aunque también no fácilmente detectable, porque desgraciadamente cada año que pasa esos alumnos se "difuminan" más en un nivel mediocre, tanto de disciplina como de esfuerzo, formación (valores) y cultura, que a pesar de quien pese abunda en no pocos centros educativos actuales.

Ya hablamos en otra reflexión anterior sobre los "olvidados (desatendidos)" de las últimas reformas educativas. Esta reflexión es para volver a insistir en el reto tan importante que constituye para la sociedad de este siglo XXI el saber conectar, educar, desarrollar y formar íntegramente a esos alumnos super–dotados que desgraciada y mayoritariamente se dedican a "sestear" –si no a otros quehaceres más preocupantes– en las actuales aulas.

La sociedad los ha necesitado siempre, pero pienso que ahora más. No nos van a resolver tantos problemas actuales, sin embargo su ayuda puede ser de importancia vital. No los abandonemos; por supuesto ni a ellos (apoyo por arriba) ni a los más necesitados (apoyo por abajo).

3.5.- Amplificación y simplificación de fracciones.

Como ya dijimos en la página 94, para obtener fracciones equivalentes a una dada se utilizan dos métodos: amplificación y simplificación.

Amplificación. Amplificar una fracción es obtener otra equivalente multiplicando sus dos términos (numerador y denominador) por un mismo número. Lógicamente, las nuevas fracciones así obtenidas tienen sus números cada vez mayores (amplificados); bueno, si no son negativos.

Simplificación. Simplificar una fracción es convertirla en otra equivalente dividiendo sus dos términos (numerador y denominador) por un mismo número. En este caso las nuevas fracciones son de términos cada vez menores (simplificados) –decimos otra vez que si no son negativos-. Una simplificación puede ser parcial o total. Es parcial cuando dicha fracción todavía se puede seguir simplificando, y es total cuando la fracción obtenida ya no se puede simplificar más.

Fracción/es irreducible/s. Al simplificar fracciones sucesivamente se llega siempre a una en la que ya no se pueden dividir sus términos por un mismo número, o sea, que ya no se puede simplificar más. Cuando esto sucede decimos que esa última fracción obtenida es una fracción irreducible, que no se puede reducir (simplificar) más.

Aunque ahora aprenderemos las dos simplificaciones (parcial y total), en adelante la mayoría de las veces lo que haremos en las fracciones es la simplificación total, que siempre obtiene una fracción irreducible al final. Lo mejor para hacer irreducible una fracción es descomponer sus términos en factores primos, o sea, hacer sus barras, y reducir sus factores comunes. En realidad, al efectuar este método lo que se hace es dividir numerador y denominador por el **m. c. d.** de ambos.

EJEMPLOS:

De AMPLIFICAR:

a) $\frac{3}{2} \to \frac{3.2}{2.2} = \frac{6}{4}; \to \frac{3.3}{2.3} = \frac{9}{6}; \to \frac{3.4}{2.4} = \frac{12}{8}; \ldots$

$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{12}{8} = \frac{30}{20} =$ Etc.

En las amplificaciones se pueden obtener todas las que quieras, o sea, infinitas fracciones equivalentes.

De SIMPLIFICAR: (simplificaciones parciales)

b) $\frac{24}{60} \to \frac{24:2}{60:2} = \frac{12}{30}; \frac{24:3}{60:3} = \frac{8}{20}; \frac{24:4}{60:4} = \frac{6}{15}; \ldots$

$\Rightarrow \frac{24}{60} = \frac{12}{30} = \frac{8}{20} = \frac{6}{15} =$ Etc.

c) $\frac{60}{-90} \to \begin{cases} \frac{60:2}{-90:2} = \frac{-30}{45}; \quad \frac{60:3}{-90:3} = \frac{-20}{30}; \\ \frac{60:5}{-90:5} = \frac{-12}{18}; \quad \frac{60:10}{90:10} = \frac{-6}{9}; \ldots \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{60}{-90} = \frac{-30}{45} = \frac{-20}{30} = \frac{-12}{18} = \frac{-6}{9}$ Etc.

En las simplificaciones hay un número limitado de fracciones equivalentes, sólo las que resultan de dividir ambos términos por divisores comunes.

De SIMPLIFICAR: (simplificación total)

d) $\frac{24}{60} \to \frac{2.2.2.3}{2.2.3.5} = \frac{2}{5} \to$ (fracción irreducible)

e) $\frac{210}{165} \to \frac{2.3.5.7}{3.5.11} = \frac{14}{11} \to$ (fracción irreducible)

f) $\frac{45}{225} \to \frac{3.3.5}{3.3.5.5} = \frac{1}{5} \to$ (fracción irreducible)

g) $\frac{300}{50} \to \frac{2.2.3.5.5}{2.5.5} = \frac{6}{1} = 6$

Otras más complicadillas:

h) $\frac{2^6.3^5.7}{2^4.3^6.7^3} = \frac{2^2}{3.7^2} = \frac{4}{3.49} = \frac{4}{147}$

i) $\frac{75600}{27000} = \frac{2.2.2.2.3.3.3.5.5.7}{2.2.2.3.3.3.5.5.5} = \frac{2.7}{5} = \frac{14}{5}$

j) $\frac{81\,x^2 z}{486\,x^3 y\, z^2} = \frac{3.3.3.x.x.z}{2.3.3.3.3.x.x.x.y.z.z} = \frac{1}{6xyz}$

k) $\frac{64\,a^4 b^3 c}{32\,a^3 b} = \frac{2^6\,a^4 b^3 c}{2^5\,a^3 b} = \frac{2ab^2c}{1} = 2ab^2c$

Y para terminar los ejemplos una para los mejores matemáticos:

ℓ) $\frac{6ab+10ac-14a^2}{2ax}$ Francamente complicada, verdad. Bien, pues factorizamos todos los productos, que quiere decir lo siguiente:

$= \frac{2.3.a.b+2.5.a.c-2.7.a.a}{2.a.x}$ Ahora sacamos factor común arriba:

$= \frac{2.a.(3.b+5.c-7.a)}{2.a.x}$ Y ahora simplificamos (reducimos) el producto "2.a":

$= \frac{3b+5c-7a}{x} \to$ Y "este cuento se acabó".

Estos últimos ejemplos son sólo para aquellos alumnos más capacitados que quieran y puedan "hincarle el diente". La mayoría de los alumnos deben dejar estas simplificaciones difíciles y dedicarse a dominar las normales.

Ahora fíjate muy bien en los siguientes ejemplos donde intento explicarte errores muy comunes al simplificar. Bueno, estos fallos los cometen sólo los que no ponen todo el interés y toda la atención posibles. Espero que tú no los cometas.

m) $\frac{2+3+5}{2+5+7} = \frac{3}{7}$ → **ERROR**

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ha reducido el 2 y el 5 de arriba} \\ \text{con el 2 y el 5 de abajo} \end{array} \right\}$

No se puede simplificar cuado hay sumas y / o restas, sólo si los factores están multiplicando. En el caso anterior se haría así:

$\frac{2+3+5}{2+5+7} = \frac{10}{14} = \frac{2.5}{2.7} = \frac{5}{7}$ → BIEN

Sin embargo, si estuvieran multiplicando:

$\frac{2.3.5}{2.5.7} = \frac{3}{7}$ → CORRECTO

n) $\frac{3.2+2.5-2.11}{2.3} = \frac{2.5-2.11}{1} = \frac{10-22}{1} = -12$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ha reducido el producto 3.2 de arriba} \\ \text{con el 2.3 de abajo} \end{array} \right\}$

MAL, porque aunque hay productos sigue habiendo sumas y restas y se hace así:

$\frac{3.2+2.5-2.11}{2.3} = \frac{3+5-11}{3} = \frac{-3}{3} = -1$

En realidad, para que comprendas mejor por qué se puede simplificar así, reduciendo el factor repetido en cada producto y el del denominador, resolvámoslo sacando previamente factor común:

$\frac{3.2+2.5-2.11}{2.3} = \frac{2.(3+5-11)}{2.3} = \frac{-3}{3} = -1$

ñ) $\frac{3.5-5.8+5}{2.5-2.3}$ → $\left\{ \begin{array}{l} \text{Reduce los tres 5 de arriba} \\ \text{y el de abajo y también el} \\ \text{3 de arriba y el de abajo} \end{array} \right\}$ →

Y le queda esto: $\frac{-8}{2-2} = \frac{-8}{0}$ → **"REFATAL"**

El simplificar así es propio de los que trabajan poco las ·"Mate". Bien se haría de estas dos formas:

$$\frac{3.5-5.8+5}{2.5-2.3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{15-40+5}{10-6} = \frac{-20}{4} = -5 \\ \frac{5.(3-8+1)}{2.(5-3)} = \frac{5.(-4)}{2.2} = \frac{-5}{1} = -5 \end{array} \right.$$

o) $\frac{5000x+x^2}{300xy}$ → $\left\{ \begin{array}{l} \text{Reduce dos 0 de arriba,} \\ \text{la "x" primera y} \\ \text{también dos 0 de abajo} \end{array} \right\}$ **MAL**

Se pueden reducir los 0 de cantidades que terminan en ceros, pero no cuando hay sumas y / o restas.

$\frac{5000x+x^2}{300xy} = \frac{100x(50+x)}{300xy} = \frac{50+x}{3y}$ → BIEN

Intentar aprender DEPRISA lleva a no aprender.

EJERCICIOS :

Ejercicios 9 al 17 resueltos en las págs 181, 182 y 183.

1) Amplifica tres veces → $\frac{-6}{-10}$

2) Simplifica dos veces → $\frac{-20}{12}$

3) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Amplifica tres veces con} \\ \text{denominadores entre 50 y 100} \end{array} \right\}$ → $\frac{3}{15}$

4) Simplifica hasta cuatro fracciones → $-\frac{48}{60}$

5) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Amplifica hasta cuatro fracciones} \\ \text{con numeradores entre 25 y 50} \end{array} \right\}$ → $\frac{-4}{3}$

6) Simplifica hasta hacerla irreducible → $\frac{30}{-90}$

7) Amplifica en cinco ocasiones → $\frac{0}{7}$

8) Simplifica hasta el final → $\frac{-64}{-32}$

En todos los ejercicios siguientes debes hacer simplificaciones totales, descomponiendo en factores primos por el método de barras donde sea necesario:

9) $\frac{36}{180}$ **10)** $\frac{210}{30}$ **11)** $\frac{5+7+13}{5}$

12) $\frac{128}{81}$ **13)** $\frac{2.5-2.11}{2.3}$ **14)** $\frac{900}{210}$

15) $\frac{3^4.5^3.11.13}{3^5.5.11}$ **16)** $\frac{2.7-5.2+2.10}{2.3-2.5}$

17) $\frac{64}{128}$ **18)** $\frac{30030}{6300}$ **19)** $\frac{243}{81}$

20) $\frac{27000}{6480}$ **21)** $\frac{1001}{1729}$ **22)** $\frac{330}{1650}$

23) $\frac{4+6-10}{4.5}$ **24)** $\frac{3.7-7+4.7}{7.6}$

25) $\frac{3-14+5}{-2.5+4}$ **26)** $\frac{5.6}{5.3+4.5-5.10}$

Los siguientes para aquellos que tengan más interés, quieran aprender más y sus capacidades se lo permitan.

27) $\frac{30.a^2.b^3}{6.a.b^2}$ **28)** $\frac{539\ x\ y^3\ z^2}{1078\ x\ y^4\ z^3}$

29) $\frac{30.a^2.b^3}{6.a.b^2}$ **30)** $\frac{539\ x\ y^3\ z^2}{1078\ x\ y^4\ z^3}$

31) $\frac{3a-3b+3c}{3a}$ **32)** $\frac{2.3^2.5^3.13}{2^3.3.5.13}$

33) $\frac{5x-8x+x}{5x}$ **34)** $\frac{210\ x^3\ y^2\ z}{360\ x\ y^4\ z}$

Si te haces mucho lío, dedícate a saber bien las simplificaciones más normales y dejas éstas.

3.6.- Fracción de una cantidad.

¿Recuerdas los significados de fracción? Los vimos en la 1ª pregunta del tema. Allí decíamos que la fracción actúa como **operador,** que significa que **para hallar la fracción de una cantidad dada se multiplica dicha cantidad por el numerador y se divide el resultado entre el denominador.** O lo que es lo mismo: se divide entre el denominador y se multiplica por el numerador.

EJEMPLOS :

a) $\frac{3}{5}$ de 2500 euros $\begin{cases} \frac{3.2500}{5} = \frac{7500}{5} = 1500 \text{ €} \\ \frac{2500}{5} \,.\, 3 = 500 \,.\, 3 = 1500 \text{ €} \end{cases}$

b) $\frac{2}{10}$ de 7000 árboles $= \frac{2.7000}{10} = 1400$ árboles

c) $\frac{8}{5}$ de 650 litros $= \frac{8.650}{5} = 1040$ litros

EJERCICIOS :

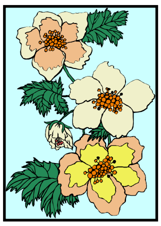
1) $\frac{1}{6}$ de 3 docenas de pasteles 2) $\frac{7}{20}$ de un siglo

3) $\frac{5}{9}$ de 18 millares 4) $\frac{4}{30}$ de 2 meses

5) $\frac{6}{11}$ de 1210 soldados 6) $\frac{1}{4}$ de un milenio

¿Sabes qué significa la palabra URBANIDAD?

Desgraciadamente habrá alumnos que no hayan oído nunca esa palabra. Algunos sí habréis escuchado a veces ésta: CORTESÍA. Y quizás más gente, aunque en los tiempos que corren no se lleva mucho, habrán oído las siguientes palabras: BUENOS MODALES.



Bien, pues Urbanidad significa cortesía, buenos modales. Una persona tiene cortesía, o sea, es cortés, si demuestra atención, interés y/o afecto hacia las personas de su entorno. Y se dice de una persona que tiene buenos modales si tiene acciones externas con las que da a conocer su BUENA EDUCACIÓN.

Urbanidad → Cortesía → Buenos Modales → → Atención → Interés → Afecto → → Buena Educación.

¡ Con la armonía, la atracción y la huella que dejan estas cualidades, y desdichadamente hoy día brillan cada vez más por su ausencia !

Y tú: ¿Eres cortés? ¿Tienes buenos modales? ¿Practicas habitualmente la Urbanidad?

3.7.- Reducción de fracciones a común denominador.

Para reducir fracciones a común denominador se emplean dos métodos:

a) **Método de los productos cruzados.**
b) **Método del Mínimo Denominador Común.**

El primer método lo vamos a explicar brevemente, pero **no lo utilizaremos**, porque es mucho más práctico y rápido el segundo.

Método de los PRODUCTOS CRUZADOS:

Dadas varias fracciones, se van multiplicando los dos términos de cada una por los denominadores de las demás y obtenemos fracciones equivalentes a las iniciales pero con el mismo denominador.

EJEMPLOS :

Reducir a común denominador:

a) $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{7} \Rightarrow \frac{3.7}{2.7}$ y $\frac{5.2}{7.2} \Rightarrow \frac{21}{14}$ y $\frac{10}{14}$

b) $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{10}$ y $\frac{8}{9} \Rightarrow$

$\frac{1.5.10.9}{6.5.10.9}$, $\frac{4.6.10.9}{5.6.10.9}$, $\frac{3.6.5.9}{10.6.5.9}$ y $\frac{8.6.5.10}{9.6.5.10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{450}{2700}$, $\frac{2160}{2700}$, $\frac{810}{2700}$ y $\frac{2400}{2700}$

¿Te has planteado seriamente a qué has venido al Instituto?

Si no lo has hecho, aunque seas de los que gustan poco de pensar, deberías hacer un esfuerzo y dedicar unos minutos a reflexionar seriamente qué propósitos persigues al venir a este Centro.

Yo, desde mi óptica de profesor, te indicaré algunos de los objetivos que se deben tener al ir a un Centro Educativo:

- **Para adquirir una buena formación.**
- **Para convivir con otros alumnos.**
- **Para aprender.**
- **Para lograr ser una PERSONA.**
- **Para adquirir autonomía y valores.**

¿Coinciden con los propósitos que tú tenías o tienes?

Método del Mínimo Denominador Común (M. D. C.):

Ahora aprendamos muy bien el método b), el llamado **método del mínimo** (**M**ínimo **D**enominador **C**omún), porque éste será el que usemos habitualmente para operar fracciones.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1º) Se halla el **mínimo común múltiplo (m. c. m.) de los denominadores** de las fracciones dadas.

2º) Se divide el m. c. m. obtenido **entre** cada uno de **los denominadores, y el cociente** de cada división **se multiplica** por ambos términos, es decir, respectivamente arriba (**por el numerador**) **y** abajo (**por el denominador**) **en cada fracción.**

3º) Las nuevas fracciones así obtenidas, que son **equivalentes** a las primeras, ya que lo que hemos hecho en ellas es amplificarlas, **tienen** ya el mismo **denominador común** (el m. c. m.). Y están listas para ser ordenadas –en forma creciente (<) o decreciente (>)–. operadas, etc.

EJEMPLOS :

Reducir las fracciones de cada apartado a común denominador por el método del mínimo.

a) $\dfrac{-2}{10}, \dfrac{8}{18}$ y $\dfrac{-1}{20} \Rightarrow$

1º) $\left\{\begin{array}{l} 10 = 2.5 \\ 18 = 2.3^2 \\ 20 = 2^2.5 \end{array}\right\} \rightarrow$ m.c.m. $= 2^2.\,3^2.\,5 = 180$

2º) $\left\{\begin{array}{l} 180:10 = \mathbf{18}\ ;\ 180:18 = \mathbf{10}\ ;\ 180:20 = \mathbf{9} \\ \dfrac{-2.18}{10.18} = \dfrac{-36}{180} \\ \dfrac{8.10}{18.10} = \dfrac{80}{180} \\ \dfrac{-1.9}{20.9} = \dfrac{-9}{180} \end{array}\right.$

3º) $\dfrac{-2}{10}, \dfrac{8}{18}$ y $\dfrac{-1}{20} \Rightarrow \dfrac{-36}{180}, \dfrac{80}{180}$ y $\dfrac{-9}{180}$

Ya tenemos tres fracciones equivalentes a las tres iniciales con el Mínimo Denominador Común (180), que es el mínimo (m.c.m.) de los denominadores.
Y estas tres últimas son las que se ordenarían o se operarían, según lo indicado en cada ejercicio.

b) $\dfrac{-7}{24}, \dfrac{6}{30}, \dfrac{0}{60}$ y $\dfrac{-1}{40} \Rightarrow$

1º) $\left\{\begin{array}{l} 24 = 2^3.\,3 \\ 30 = 2.3.5 \\ 60 = 2^2.\,3.\,5 \\ 40 = 2^3.\,5 \end{array}\right\} \rightarrow$ m.c.m. $= 2^3.3.5 = 120$

2º) $\left\{\begin{array}{l} 120:24 = \mathbf{5}\ ;\ 120:30 = \mathbf{4}\ ;\ 120:60 = \mathbf{2}\ ;\ 120:40 = \mathbf{3} \\ \dfrac{-7.5}{24.5}, \dfrac{6.4}{30.4}, \dfrac{0.2}{60.2} \text{ y } \dfrac{-1.3}{40.3} \Rightarrow \end{array}\right.$

3º) $\dfrac{-7}{24}, \dfrac{6}{30}, \dfrac{0}{60}$ y $\dfrac{-1}{40} \Rightarrow \dfrac{-35}{120}, \dfrac{24}{120}, \dfrac{0}{120}$ y $\dfrac{-3}{120}$

Si, por ejemplo, hubiera que ordenarlas, sería así:

$$\frac{-35}{120} < \frac{-3}{120} < \frac{0}{120} < \frac{24}{120}$$

Bueno, ahora al principio estos ejercicios te resultarán un poco largos; es normal. Pero dentro de unos días, cuando necesites reducir fracciones a común denominador por el método del mínimo para sumarlas y/o restarlas, lo harás en una línea, es decir, mucho más breve y rápido.

EJERCICIOS :

Ejercicios 1 al 9 resueltos en las págs 181, 182 y 183.

1) $\dfrac{6}{10}$ y $\dfrac{2}{12} \Rightarrow$

2) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{5}$ y $\dfrac{4}{2} \Rightarrow$

3) $\dfrac{3}{4}, \dfrac{-2}{5}, \dfrac{-6}{3}$ y $\dfrac{1}{3} \Rightarrow$

4) $\dfrac{-12}{20}, \dfrac{8}{-15}$ y $\dfrac{1}{18} \Rightarrow$

5) $\dfrac{20}{80}$ y $\dfrac{30}{40} \Rightarrow$

6) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{5}$ y $\dfrac{4}{2} \Rightarrow$

7) $\dfrac{7}{12}, \dfrac{1}{6}$ y $\dfrac{-5}{3} \Rightarrow$

8) $\dfrac{1}{24}, \dfrac{2}{12}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{6}$ y $\dfrac{5}{8} \Rightarrow$

9) $\dfrac{20}{-40}, \dfrac{-12}{30}$ y $\dfrac{10}{24} \Rightarrow$

10) $\dfrac{-1}{30}, \dfrac{7}{2}, \dfrac{-4}{15}$ y $\dfrac{2}{6} \Rightarrow$

11) $\dfrac{4}{12}, \dfrac{1}{20}, \dfrac{-3}{15}$ y $\dfrac{5}{6} \Rightarrow$

Este método es fundamental en Matemáticas para los alumnos de **E.S.O.** Lo usaremos cientos de veces, cada vez que hay sumas y rectas de fracciones, y, además, cuando lleguemos al tema 5 es indispensable dominarlo muy bien para hacer las ecuaciones con denominadores. Así que ya sabes: hay que saberlo "al dedillo".

3.8.- Ordenación de fracciones.

Toda ordenación se puede hacer de dos formas:

❶ De forma CRECIENTE, o sea, de menor a mayor (signo a utilizar: ❮).

❷ De forma DECRECIENTE, es decir, de mayor a menor, cuyo signo es: ❯.

Para clasificar esta ordenación, dividiremos las fracciones en grupos:

① Fracciones que tienen el mismo numerador y distintos denominadores.

② Fracciones que tienen el mismo denominador y distintos numeradores.

③ Fracciones que distintos numeradores y denominadores.

1º) De las fracciones que tienen **iguales los numeradores** son **mayores** aquellas que poseen **menor el denominador**, porque las partes en que se divide cada unidad son mayores al hacer menos partes de cada unidad.

Ordenar de forma creciente:

6 / 7, 6 / 5, 6 / 1, 6 / 6 y 6 / 10.

$$\frac{6}{10} < \frac{6}{7} < \frac{6}{6} < \frac{6}{5} < \frac{6}{1}$$

2º) De las fracciones que tienen **iguales los denominadores** son **mayores** aquellas que poseen **mayor numerador**, ya que en este caso todas las partes son iguales, y será mayor la fracción que coge más partes.

Ordenar de forma decreciente:

9 / 5, 0 / 5, 10 / 5, 1 / 5, 5 / 5 y 6 / 5.

$$\frac{10}{5} > \frac{9}{5} > \frac{6}{5} > \frac{5}{5} > \frac{1}{5} > \frac{0}{5}$$

3º) Para comparar (ordenar) fracciones que tienen sus **términos distintos, se reducen a M.D.C.** (Mínimo Denominador Común). Luego se ordenan de forma creciente (<) o decreciente (>), según te indiquen.

Ordenar las siguientes fracciones:

3 / 5, 2 / 6, 1 / 4 y 10 / 30 .

(Si no te indican la forma de ordenarlas, como tú quieras)

$$\frac{3}{5}, \frac{2}{6}, \frac{1}{4} \text{ y } \frac{10}{30} \Rightarrow \text{m.c.m.}(5,6,4 \text{ y } 30) = \mathbf{60}$$

$$60 : 5 = \mathbf{12}\ ;\quad 60 : 6 = \mathbf{10}\ ;\quad 60 : 4 = \mathbf{15}\ ;\quad 60 : 30 = \mathbf{2}$$

$$\frac{3.12}{5.12}, \frac{2.10}{6.10}, \frac{1.15}{4.15} \text{ y } \frac{10.2}{30.2} \Rightarrow \frac{36}{60}, \frac{20}{60}, \frac{15}{60} \text{ y } \frac{20}{60} \Rightarrow$$

$$\frac{15}{60} < \frac{20}{60} = \frac{20}{60} < \frac{36}{60}$$

☞ EJERCICIOS DE REPASO ☹

Ejercicios resueltos en las páginas 179 y 180.

1.- ¿Cuáles son los diversos significados que pueden tener las fracciones?

2.- Fracciones: **2/3, 10/20, 8/6, 23/0, 15/5, 18/12, 5/1, 4/4.** Responde de cada una de las fracciones todos los apartados siguientes:

a) ¿Cómo se llaman sus términos? ¿Cómo se lee la fracción?
b) Represéntala de las dos formas estudiadas: con figuras planas y en una línea recta racional.
c) ¿Qué clase de fracción es?¿Es mayor, igual o menor que la unidad? (¿El signo ?) ¿Cuánto le falta o le sobra para valer la unidad?
d) ¿Se puede transformar en número mixto? ¿Por qué sí o no? Si se puede, hazlo.
e) Escribe la fracción inversa de ella. ¿Cuál es mayor y cómo lo sabes?
f) ¿Se puede simplificar? Si la respuesta es afirmativa, halla una fracción equivalente a ella por simplificación parcial y otra por simplificación total (barras: descomp. en factores primos).
g) ¿Se puede amplificar? Halla dos fracciones amplificándola.

3.- Escribe tres números mixtos que tengan todos sus términos distintos, y al lado de cada uno escribes cómo se leen y los transformas en fracción. ¿Cómo son las tres fracciones obtenidas?

4.- Aquí tienes cinco fracciones decimales y cinco números decimales. Transforma las primeras en números decimales y los segundos en fracciones decimales.

a) 23/1000 b) 567/1.000 c) 4/10.000
d) 560/10 e) 25.000/100 f) 34’56
g) 0’0082 h) 65’8 i) 3’5 j) 0’701

5.- Pablo le dice a su amigo que en la fiesta de cumpleaños de los mellis se comió **8/5** de una tarta. ¿Qué puedes comentarle a Pablo de lo dicho?

6.- Hallar fracciones de cantidades:

a) Los **4/5** de mil euros.
b) Los **3/20** del terreno de juego, que era de 1.000 metros cuadrados.
c) Los **2/7** de 35 canicas.
d) Un noveno de seis docenas.
e) Cinco octavos de un milenio.

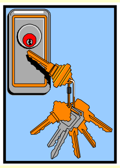
7.- Reducir a común denominador (por el método del M.D.C.) y ordenar en forma creciente los apartados impares y en forma decreciente los pares. (No olvides colocar los signos)

a) 12/20, 5/30 y 2/6.
b) 1/2, 3/6, 5/10 y 11/30.
c) 2/5, 5/5, 1/5, 10/5 y 0/5.
d) 24/10, 24/24, 24/50 y 24/1.
e) 15/60, 12/24 y 5/10.

8.- Simplifica las siguientes fracciones hasta encontrar su representante canónico, o sea, hasta hacerlas irreducibles.

a) 31/103 b) 32/64 c) 243/81 d) 125/625
e) 1296/216 f) 720/400 g) 131/31
h) 360/480 i) 128/384 j) 270/54

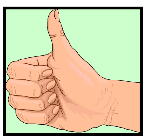
Para abrir cualquier cerradura es imprescindible hacerlo con la llave adecuada; es lógico. Incluso hay cerraduras que necesitan de más de una llave para penetrar en aquello que están guardando.



En bastantes ocasiones, muchos padres preguntan por qué su hijo que iba tan bien en la Primaria empieza a sacar suspensos y a ir mal en Secundaria. **Puede haber diversas razones, pero algunas más habituales son:**

- Que no ha llegado con el suficiente hábito de trabajo.
- Que su atención en las clases es muy dispersa.
- Que no ha adquirido la base esencial para desenvolverse con suficiencia en E.S.O.
- Que adolece de falta de interés.
- Que no está acostumbrado a esforzarse.
- Que carece de unas mínimas técnicas de estudio.
- Etc.

Y claro, la puerta de la E.S.O. necesita de varias llaves (INTERÉS, ESFUERZO, TRABAJO, ATENCIÓN, ETC.) para penetrar en su interior y sacar poco a poco provecho y fruto a sus estudios.



¿Qué llave/s te falta/n a ti? Ten en cuenta que si tú quieres la/s conseguirás. ¡ Á N I M O !

A continuación algunas cuestiones y problemas más complicados. Realmente están destinados a aquellos alumnos que gustan de la dificultad, esforzarse por aprender más y resolver cosas más difíciles que las normales explicadas/estudiadas en el tema.

9.- ¿Cuántas veces se puede simplificar una fracción?

10.- ¿Cómo se llama de otra manera a una fracción irreducible?

11.- A ver si sabes qué palabras le faltan al final a la siguiente frase: *"Los términos de todas las fracciones irreducibles son* ________ _______ ______ __ ".

(4 palabras, aunque pueden ser 3 si eliminamos la 1ª)

12.- Si quieres obtener **1500** euros como resultado de aplicar una fracción a la cantidad de **3500** euros, ¿qué fracción es la que debe actuar como operadora?

13.- Realiza un esquema de aplicación de una fracción a una cantidad en estos tres casos: a) Que el numerador sea nulo (0), b) Que el denominador sea cero y c) Que la cantidad sea 0.

14.- ¿Cómo harías para reducir estas fracciones **(5/12, 1/6 y 2/4)** a común denominador sin usar ninguno de los dos métodos?

15.- Si tuvieras que reducir a **M.D.C.** (Mínimo Denominador Común) las siguientes fracciones: **4 / 5, 16 / 20 y 8 / 10,** de la manera más rápida posible, ¿qué se te ocurriría?

16.- ¿Cuál es mayor y menor de entre estas fracciones **(7 / 7 , 6 / 5 y 9 /10)** sin reducirlas a común denominador, sin dividir y sin hacer ninguna otra operación, o sea, sólo con verlas?

17.- Pon un ejemplo de fracción que al simplificarla dé como numerador cero. (**¡**)

18- Ahora otra fracción que al simplificarla se obtenga un cero en el denominador. (**¡**)

19.- ¿Qué relación tiene que haber entre los dos términos de una fracción para que al simplificarla se obtenga un número entero?

3.9.-Sumas (adición) y restas (sustracción) combinadas de fracciones.

NORMAS:

1ª) Si las fracciones ya tienen **el mismo denominador**, se operan (+ o −) **directamente** **los numeradores.**

2ª) Si los denominadores son distintos, en las operaciones combinadas de sumas y restas de fracciones hay que reducir previamente a común denominador, pero haciéndolo siempre **por el método del mínimo** común múltiplo (m.c.m.), llamado **método del M. D. C.** (**Mínimo Denominador Común**).

3ª) Una vez se obtengan las fracciones equivalentes con el mismo denominador, **se operan** (+ o −) **los numeradores**, obteniéndose una sola fracción con el mismo denominador –el m.c.m. de los anteriores-, que será el resultado.

4ª) Y, eso sí, no olvides que todos los **resultados** deben estar **simplificados** (ser fracción irreducible, llamada de otra forma representante canónico del número racional, como veremos más adelante).

EJEMPLOS:

Con los mismos denominadores:

a) $\frac{4}{12} + \frac{-3}{12} + \frac{7}{12} = \frac{4-3+7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2.2.2}{2.2.3} = \frac{2}{3}$

b) $\frac{-5}{8} - \frac{9}{8} = \frac{-5-9}{8} = \frac{-14}{8} = \frac{-2.7}{2.2.2} = -\frac{7}{4}$

c) $-\frac{1}{6} - \frac{-9}{6} + \frac{4}{6} = \frac{-1+9+4}{6} = \frac{12}{6} = 2$

Con distintos denominadores:

d) $\frac{-4}{10} + \frac{1}{15} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{m.c.m. (10 y 15)} = 30 \\ 30:10 = 3 \ ; \ 30:15 = 2 \end{matrix} \right\}$

$\frac{-4.3}{10.3} + \frac{1.2}{15.2} = \frac{-12+2}{30} = \frac{-10}{30} = -\frac{1}{3}$

e) $\frac{35}{72} - \frac{21}{40} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{m.c.m. (72 y 40)} = 360 \\ 360:72 = 5 \ ; \ 360:40 = 9 \end{matrix} \right\}$

$\frac{35.5}{360} - \frac{21.9}{360} = \frac{175-189}{360} = \frac{-14}{360} = -\frac{7}{180}$

f) $\frac{3}{24} - \frac{6}{12} + \frac{4}{16} + \frac{1}{8} \Rightarrow \text{m.c.m. (denominadores)} = 48$

$= \frac{3.2 - 6.4 + 4.3 + 1.6}{48} = \frac{6-24+12+6}{48} = \frac{0}{48} = 0$

g) $\frac{12}{-20} + \frac{-5}{18} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{m.c.m. (−20 y 18)} = 180 \\ 180:20 = 9 \ ; \ 180:18 = 10 \end{matrix} \right\}$

$\frac{-108-50}{180} = \frac{-158}{180} = \frac{-2.79}{2.2.3.3.5} = -\frac{79}{90}$

h) $\frac{3}{30} + \frac{1}{10} - \frac{-2}{15} \Rightarrow \text{m.c.m. (denominadores)} = 30$

$= \frac{3+3+4}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

i) $\frac{-3}{6} + \frac{1}{12} - \frac{5}{-20} + \frac{-10}{4} = \frac{-30+5+15-150}{60} =$

$= \frac{20-180}{60} = \frac{-160}{60} = -\frac{2.2.2.2.2.5}{2.2.3.5} = -\frac{8}{3}$

j) $\frac{4}{10} + \frac{1}{5} - \frac{65}{25} = \frac{4.5 + 1.10 - 65.2}{50} =$

$= \frac{20+10-130}{50} = \frac{-100}{50} = -2$

EJERCICIOS:

Ejercicios 1 al 9 resueltos en las págs 181, 182 y 183.

1) $\frac{8}{10} + \frac{4}{10} =$

2) $\frac{6}{20} + \frac{2}{20} - \frac{10}{20} =$

3) $\frac{5}{12} + \frac{-2}{6} + \frac{-6}{2} + \frac{1}{4} =$

4) $\frac{-2}{24} - \frac{3}{-15} - \frac{5}{8} =$

5) $\frac{-6}{30} - \frac{10}{30} =$

6) $\frac{1}{30} - \frac{4}{10} + \frac{5}{12} =$

7) $\frac{4}{18} + \frac{3}{6} + \frac{-20}{9} =$

8) $\frac{5}{48} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} - \frac{7}{2} + \frac{6}{24} =$

9) $\frac{20}{-18} + \frac{-12}{10} - \frac{10}{15} =$

10) $\frac{-8}{30} - \frac{5}{2} - \frac{-1}{15} + \frac{3}{-6} =$

11) $\frac{10}{12} - \frac{1}{20} + \frac{-4}{15} + \frac{5}{6} =$

Algunos para los "olvidados" de las últimas reformas:

12) $\frac{-a}{75} + \frac{3a}{25} - \frac{2a}{15} =$

13) $\frac{2x}{18} + \frac{x}{24} - \frac{5x}{12} + \frac{3x}{9} =$

14) $\frac{-5}{6a} - \frac{4}{10a} + \frac{8}{a4} =$

15) $\frac{1}{20x} - \frac{-4}{x30} + \frac{-6}{12x} - \frac{3}{x} =$

Estos cuatro últimos tienen "miga", ¿verdad? Son para los que se "atrevan", pero al menos con una cierta capacidad.

3.10.- Propiedades de la suma de fracciones.

1) **Propiedad CONMUTATIVA.**
(de commutar = cambiar)
El resultado de la "+" de fracciones no depende del orden.

2) **Propiedad ASOCIATIVA.**
(de asociar = agrupar)
El resultado de la suma de fracciones no depende de la forma en que se asocien.

3) **Propiedad ELEMENTO NEUTRO.**
(de neutral = imparcial)
El elemento neutro de la suma de fracciones es la fracción cero (0), o sea, todas aquellas fracciones que tienen como numerador " 0 ".

Recuerda: todas las fracciones que tienen como numerador " 0 " son equivalentes, es decir, representan la misma parte, o sea, NADA, independientemente del denominador que tengan.

- Pensemos, por ejemplo, en la clásica tarta: A **Raquel** le damos 0/3, a **Sergio** 0/5, a **Eva** 0/10, para **Aniceto** 0/2 y para **Victoria** 0/4. Bien, ¿comprendes por qué todas las que tengan " 0 " en el numerador son iguales? Está claro, ¿verdad? Dividimos la tarta en 3 partes para Raquel, en 5 para Sergio, en 10 para Eva, en 2 para Aniceto y en 4 para Victoria, pero a todos les damos CERO ("0"), O SEA, NADA. (Así que al final la tarta me la llevo a mi casa y yo me la iré comiendo)
- Fíjate en la palabra "NEUTRO". Una cosa, algo o alguien "neutro" quiere decir que no favorece a nadie, ni está a favor ni en contra. O sea, como debieran ser todos los árbitros, NEUTRALES, y no favorecer muchas veces al F.C. Barcelona y a los equipos poderosos.
- Por eso, llamamos elemento NEUTRO de la suma al cero, ya que no incide nada al sumarle, ni quita, ni pone, ni añade, ni rebaja.

4) **Propiedad ELEMENTO OPUESTO.**
(de oponer ... contrario)
El elemento opuesto de una fracción es **otra fracción** con los mismos términos pero **de signo contrario**, como ya vimos al principio en las clases de fracciones.

EJEMPLOS :

De la propiedad conmutativa :

$$\begin{cases} \frac{4}{15} + \frac{7}{10} = \frac{8+21}{30} = \frac{29}{30} \\ \frac{7}{10} + \frac{4}{15} = \frac{8+21}{30} = \frac{29}{30} \end{cases}$$

De la propiedad asociativa :

$$\begin{cases} \frac{4}{12} + \left\{\frac{2}{4} + \frac{3}{20}\right\} = \frac{4}{12} + \left\{\frac{13}{20}\right\} = \frac{20+39}{60} = \frac{59}{60} \\ \left\{\frac{4}{12} + \frac{2}{4}\right\} + \frac{3}{20} = \left\{\frac{10}{12}\right\} + \frac{3}{20} = \frac{50+9}{60} = \frac{59}{60} \end{cases}$$

De la propiedad elemento neutro :

$$\begin{cases} \frac{8}{24} + \frac{0}{15} = \frac{40+0}{120} = \frac{40}{120} \rightarrow \left[= \frac{8}{24} \right] \\ \frac{6}{10} + \frac{0}{18} = \frac{54+0}{90} = \frac{54}{90} \rightarrow \left[= \frac{6}{10} \right] \end{cases}$$

De la propiedad elemento opuesto :

$$\begin{cases} \frac{3}{40} + \frac{-3}{40} = \frac{3-3}{40} = \frac{0}{40} = 0 \\ -\frac{9}{11} + \frac{9}{11} = \frac{-9+9}{11} = \frac{0}{11} = 0 \end{cases}$$

3.11.- Operaciones con paréntesis y corchetes

NORMAS: Se pueden resolver de **dos formas**:

1ª) (De dentro hacia fuera) Haciendo cada uno de los paréntesis, de los cuales se irán obteniendo una sola fracción en cada uno de ellos. Resolviendo a continuación cada uno de los corchetes, hasta volver a obtener una fracción de cada uno, y, por último, operar las fracciones así obtenidas **(siempre por el método del mínimo).**

2ª) (De fuera hacia dentro) Quitando paréntesis y corchetes, para lo cual debes tener en cuenta que:

a) En primer lugar se eliminan los paréntesis: si tienen delante un signo " + ", todo queda igual; si tienen delante un signo " – ", se cambia de signo a todo lo de dentro de ellos.

b) En segundo lugar eliminas los corchetes: si tienen delante un signo " + ", todo queda igual; si tienen delante un signo " – ", se cambia de signo a todo lo de dentro de ellos.

c) Y, por fin, se operan todas las fracciones (o enteros) así obtenidas.

¡Ah! Y no olvides el estribillo que te vengo repitiendo en las últimas fichas: “ Todos los resultados deben estar simplificados totalmente. ”

➪ Supongo que a muchos se le ocurrirá esta pregunta: **¿Qué método es mejor?** O ¿Cuál hacemos? Bien, no te puedo dar una respuesta categórica, o sea, que tenga valor siempre. Habrá ejercicios en los que conviene la 1ª forma y, sin embargo, en otros preferiremos la 2ª. Para aprender a elegir cuál de ellas es más conveniente “sólo” necesitamos ejercitarnos mucho, como en todo.

➪ Como sugerencia, te diré que cuando terminemos las explicaciones de los temas sobre fracciones y realicemos operaciones con expresiones en las que aparezcan paréntesis y/o corchetes con sumas, restas, productos y divisiones, **generalmente** se empieza resolviendo los paréntesis, obteniendo de cada uno un resultado que se va operando con el resto de la expresión. O sea, **el método 1º, de dentro hacia fuera, es el de uso más generalizado.**

EJEMPLOS :

De la 1ª forma :

$$\frac{-2}{60}+\left(\frac{1}{30}+\frac{3}{12}-\frac{6}{5}\right)-\left[\frac{4}{10}-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\right)-\frac{2}{20}\right]=$$
$$=\frac{-2}{60}+\left(\frac{2+15-72}{60}\right)-\left[\frac{4}{10}-\left(\frac{2-5}{4}\right)-\frac{2}{20}\right]=$$
$$=\frac{-2}{60}+\left(\frac{-55}{60}\right)-\left[\frac{4}{10}-\left(\frac{-3}{4}\right)-\frac{2}{20}\right]=$$
$$=\frac{-2}{60}-\frac{55}{60}-\left[\frac{8+15-2}{20}\right]=\frac{-2}{60}-\frac{55}{60}-\left[\frac{21}{20}\right]=$$
$$=\frac{-2}{60}-\frac{55}{60}-\frac{21}{20}=\frac{-2-55-63}{60}=\frac{-120}{60}=-2$$

De la 2ª forma :

$$\frac{-2}{5}-\left[\frac{1}{10}-\left(\frac{5}{3}-\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{6}-\frac{2}{15}\right]+\left(\frac{5}{12}-\frac{10}{24}\right)=$$
$$=\frac{-2}{5}-\left[\frac{1}{10}-\frac{5}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{6}-\frac{2}{15}\right]+\frac{5}{12}-\frac{10}{24}=$$
$$=\frac{-2}{5}-\frac{1}{10}+\frac{5}{3}-\frac{4}{3}-\frac{1}{6}+\frac{2}{15}+\frac{5}{12}-\frac{10}{24}=$$
$$=\frac{-48-12+200-160-20+16+50-50}{120}=\frac{-24}{120}=$$
$$=\frac{-2.2.2.3}{2.2.2.3.5}=-\frac{1}{5}$$

En lugar de hacer ejercicios, explicaremos el producto y división y ya practicaremos más adelante.

3.12.- Producto y división de fracciones.

PRODUCTO:

Para multiplicar fracciones **se multiplican los numeradores y** obtener así el numerador del producto, y **se multiplican los denominadores** para formar el denominador del producto. Después, la fracción resultado del producto se debe simplificar hasta hacerla irreducible.

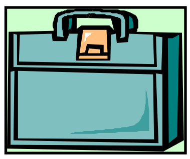
DIVISIÓN:

Para dividir dos fracciones se multiplica la fracción dividendo (la 1ª) por la inversa (recuerda el apartado 6º de la pregunta nº 4: clases de fracciones) de la fracción divisor (la 2ª).

En la práctica siempre dividiremos dos fracciones **multiplicando sus términos en cruz.** Y recuerda el “estribillo”: *simplificar los resultados.*

❒ **CONSEJO RENTABLE:** es muy conveniente, en ocasiones, poner los resultados de la **descomposición** en factores **de** los **numeradores y denominadores antes** de hacer las multiplicaciones de ellos. En multitud de ejercicios se pueden hacer mentalmente; así, en lugar de obtener números elevados en los resultados, se hace ya directamente la simplificación, se tarda menos y, además, tendrás menos errores en las operaciones.

Cada noche, Aurora, cuando termina de cenar y antes de acostarse, recoge sus cuadernos, bolígrafos y libros y los guarda en su mochila.



Sergio suele hacer sus deberes por la tarde-noche, antes de cenar, y todos los días cuando termina no se va a jugar, o a las escuelas deportivas o a la clases de música sin antes haber recogido en la mochila todo el material usado para hacer sus tareas y estudiar, y así queda todo listo para la mañana siguiente.

Cuando toca el despertador todas las mañanas, Sofía lo apaga de mala gana. Se levanta a regañadientes y empieza corre que te corre porque se la hace tarde para llegar al Instituto antes de las 8:15. Al coger su mochila se acuerda de que la noche anterior no tuvo ganas de guardar sus libros y cuadernos, y se enfada porque perderá más tiempo todavía. Casi llega tarde. Y, desgraciadamente, eso le pasa muchas veces.

¿ Con cuál de los tres casos descritos, Aurora, Sergio o Sofía, te identificas tú más ?

EJEMPLOS :

a) $\frac{12}{35}\cdot\frac{6}{18}=\frac{12.6}{35.18}=\frac{72}{630}=\frac{2.2.2.3.3}{2.3.3.5.7}=\frac{4}{35}$

En lugar de poner 12.6 y 35.18, hacer esos productos, hacer las descomposiciones de 72 y 630 y simplificar, ahora ponemos directamente los factores de 12, 6, 35 y 18 que seguramente muchos sabéis mentalmente. Veamos:

$=\frac{(2.2.3).(2.3)}{(5.7).(2.3.3)}=\frac{4}{35}$ [Mejor esta 2ª forma, ¿no?]

b) $\frac{20}{30}:\frac{70}{21}=\frac{20.21}{30.70}=\frac{420}{2100}=\frac{2.2.3.5.7}{2.2.3.5.5.7}=\frac{1}{5}$

$\frac{20}{30}:\frac{70}{21}=\frac{(2.2.5).(3.7)}{(2.3.5).(2.5.7)}=\frac{1}{5}$

c) $\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{8}{12}=\frac{2.1.8}{6.10.12}=\frac{16}{720}=\frac{2.2.2.2}{2.2.2.2.3.3.5}=\frac{1}{45}$

$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{8}{12}=\frac{(2).(1).(2.2.2)}{(2.3).(2.5).(2.2.3)}=\frac{1}{45}$

Bueno, creo que queda meridianamente claro que la 2ª forma es más rentable, como dijimos en la página anterior. De todos modos, tú hazlo como más seguro te encuentres, y al principio es muy habitual hacerlo de la 1ª forma. Los demás los haré de la forma práctica.

d) $\frac{24}{15}\cdot\frac{2}{20}\cdot\frac{10}{8}=\frac{(2.2.2.3).(2).(2.5)}{(3.5).(2.2.5).(2.2.2)}=\frac{1}{5}$

e) $\frac{30}{33}:\frac{12}{4}:\frac{10}{55}=\frac{30.4}{33.12}:\frac{10}{55}=\frac{30.4.55}{33.12.10}=$

$=\frac{(2.3.5).(2.2).(5.11)}{(3.11).(2.2.3).(2.5)}=\frac{5}{3}$

f) $\frac{10}{18}\cdot\frac{2}{6}:\frac{1}{5}:\frac{3}{4}=\frac{10.2}{18.6}:\frac{1}{5}:\frac{3}{4}=$

$=\frac{10.2.5}{18.6.1}:\frac{3}{4}=\frac{10.2.5.4}{18.6.1.3}=\frac{2.5.2.5.2.2}{2.3.3.2.3.3}=\frac{100}{81}$

g) $\frac{2}{9}:\frac{1}{7}\cdot\frac{27}{14}=\frac{2.7}{9.1}\cdot\frac{27}{14}=\frac{2.7.27}{9.1.14}=$

$=\frac{2.7.3.3.3}{3.3.2.7}=\frac{3}{1}=3$

EJERCICIOS :

Ejercicios resueltos en las págs 181, 182 y 183.

1) $\frac{8}{12}\cdot\frac{6}{15}=$

2) $\frac{18}{5}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{10}{16}=$

3) $\frac{14}{22}:\frac{21}{33}=$

4) $\frac{1}{10}:\frac{45}{20}:\frac{2}{30}=$

5) $\frac{3}{5}:\frac{1}{8}\cdot\frac{32}{4}=$

6) $\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{4}:\frac{10}{15}:\frac{30}{40}=$

3.13.- Propiedades del producto de fracciones.

Propiedad CONMUTATIVA.

(de commutar = cambiar)

El orden en que se sitúen las fracciones no altera el resultado del producto.

Propiedad ASOCIATIVA.

(de asociar = agrupar)

El resultado de varios productos no se modifica por la forma de asociar las fracciones.

Propiedad ELEMENTO NEUTRO.

(de neutral = imparcial)

El elemento neutro del producto de fracciones es la fracción unidad (1), o sea, todas aquellas fracciones que tienen numerador y denominador iguales.

Propiedad ELEMENTO INVERSO.

(inverso → invertido)

La fracción inversa de una dada es otra con sus términos cambiados (invertidos).

Al multiplicar cualquier fracción por su inversa se obtiene el elemento neutro, es decir, la fracción unidad.

Propiedad DISTRIBUTIVA.

(distribuir → repartir)

En expresiones de fracciones que multiplican a paréntesis en los que hay sumas y/o restas se puede repartir (distribuir) el producto a las fracciones incluidas en el paréntesis, obteniéndose el mismo resultado que resolviendo antes el paréntesis y multiplicando después.

Propiedad SACAR FACTOR COMÚN.

(factor común → factor repetido)

En aquellas sumas y/o restas de productos de fracciones que tienen algún factor (fracción) "repe" es posible extraer (sacar) la fracción repetida para que multiplique conjuntamente a todas las demás, que incluiremos con sus sumas y/o restas dentro de un paréntesis. Y, por supuesto, se obtiene el mismo resultado que operando en primer lugar los productos y sumando o restando al final.

NOTA: es conveniente observar que aplicar la propiedad distributiva es justamente hacer lo contrario de sacar factor común, o viceversa. Al distribuir, el factor de fuera multiplica a todo lo de dentro (se reparte), y al sacar factor común, los factores que están repartidos se convierten en uno solo que es común y multiplica fuera a todos.

EJEMPLOS de cada una de las propiedades del producto de fracciones que se ha explicado en la página anterior :

De la propiedad conmutativa :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{10}{6}\cdot\dfrac{4}{14}=\dfrac{2.5.2.2}{2.3.2.7}=\dfrac{10}{21} \\[2ex] \dfrac{4}{14}\cdot\dfrac{10}{6}=\dfrac{2.2.2.5}{2.7.2.3}=\dfrac{10}{21} \end{array}\right\}$$

De la propiedad asociativa :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{10}{16}\cdot\left\{\dfrac{6}{25}\cdot\dfrac{4}{3}\right\}=\dfrac{10}{16}\cdot\left\{\dfrac{24}{75}\right\}=\dfrac{2.5.2.2.2.3}{2.2.2.2.3.5.5}=\dfrac{1}{5} \\[2ex] \left\{\dfrac{10}{16}\cdot\dfrac{6}{25}\right\}\cdot\dfrac{4}{3}=\left\{\dfrac{60}{400}\right\}\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{2.2.3.5.2.2}{2.2.2.2.5.5.3}=\dfrac{1}{5} \end{array}\right\}$$

De la propiedad elemento neutro :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{8}{24}\cdot\dfrac{7}{7}=\dfrac{8.7}{24.7}=\dfrac{56}{168}\rightarrow\left[=\dfrac{8}{24}\right] \\[2ex] \dfrac{5}{13}\cdot\dfrac{20}{20}=\dfrac{5.20}{13.20}=\dfrac{100}{260}\rightarrow\left[=\dfrac{5}{13}\right] \end{array}\right\}$$

De la propiedad elemento inverso :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{-3}{40}\cdot(\text{su inversa})\dfrac{40}{-3}=\dfrac{-120}{-120}\left[\begin{array}{l}\text{fracción unidad =}\\ \text{elemento neutro}\end{array}\right]=1 \\[2ex] \left[\text{una fracción}\right].\left[\text{su inversa}\right]=\left[\text{elemento neutro}\right] \end{array}\right\}$$

De la propiedad distributiva:

$$\frac{2}{3}\cdot\left[\frac{3}{10}+\frac{1}{6}-\frac{5}{4}\right]=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=$$

$$=\frac{6}{30}+\frac{2}{18}-\frac{10}{12}=\frac{36+20-150}{180}=\frac{-94}{180}=-\frac{47}{90}$$

Fíjate que habiendo simplificado las fracciones que han resultado de los productos se habría hecho más fácil:

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{5}{6}=\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Sigue tú y comprueba}\\ \text{que da lo mismo.}\end{array}\right.$$

También se puede hacer resolviendo antes el paréntesis y después multiplicando. Veamos:

$$\frac{2}{3}\cdot\left[\frac{3}{10}+\frac{1}{6}-\frac{5}{4}\right]=\frac{2}{3}\cdot\left[\frac{18+10-75}{60}\right]=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{-47}{60}=\frac{-2.47}{3.2.2.3.5}=-\frac{47}{90}$$

De la propiedad sacar factor común:

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\cdot\frac{11}{8}=\left[\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\frac{11}{8}\right]\cdot\frac{2}{5}=$$

$$=\left[\frac{1.8+5.4-11.3}{24}\right]\cdot\frac{2}{5}=\left[\frac{-5}{24}\right]\cdot\frac{2}{5}=\frac{-10}{120}=-\frac{1}{12}$$

También se puede resolver haciendo primero los productos y después las sumas y restas. Veamos:

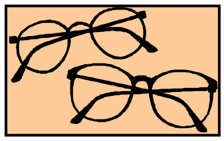
$$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\cdot\frac{11}{8}=\frac{2}{15}+\frac{10}{30}-\frac{22}{40}=$$

$$=\frac{16+40-66}{120}=\frac{-10}{120}=-\frac{1}{12}$$

Hay expresiones que pueden resolverse aplicando la propiedad distributiva y sin aplicarla, y el resultado, lógicamente, es el mismo. Igualmente, hay expresiones que se pueden resolver sacando factor común y sin sacarlo. Evidentemente, si no nos equivocamos, obtenemos lo mismo de cualquier forma. ¿Pero qué forma de las dos es la que se te da mejor? ¿Y qué forma es la más práctica y rápida? Bueno, a la 1ª pregunta te contestarás tú, pero respecto a la 2ª pregunta, te diré que la forma más práctica y rápida es la 2ª, es decir, sin distribuir y sin sacar factor común. No obstante, es necesario y muy conveniente que aprendas a aplicar la propiedad distributiva y a sacar factor común, pues en otros temas (sobre todo de Álgebra) te será de mucha utilidad.

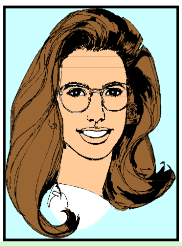
¿Qué operación u operaciones te parecen más difíciles hasta ahora de las fracciones: la suma, la resta, la multiplicación o la división? Según me dice mi experiencia, donde más suelen fallar los alumnos, hasta que dominan todas las operaciones, es en la suma y en la resta, porque no aplican correctamente el método del mínimo (para reducir a común denominador).

A lo largo de la vida, a cada persona le van apareciendo en su organismo una serie de enfermedades, defectos, deficiencias, faltas o anomalías. Es absolutamente normal. **Uno de esos defectos muy habituales desde edades tempranas es el de la vista.**



Los tres defectos más frecuentes que suelen presentarse son la miopía, hipermetropía y astigmatismo.

Es muy corriente, y comprensible, que a la mayoría de chicos les cueste mucho ponerse gafas; no les gusta, les irrita y les incomoda. Pero no hay más remedio que ponérselas, ya que si no lo haces te irá aumentando la graduación, verás menos y peor y aumentará el grosor de los cristales, con lo cual te sentirás estéticamente más incómodo. Aunque hoy día muchos ganáis encanto con las gafas.



Quizás, aun poniendo muchos remedios, habrá personas que tengan **defectos de visión**, pero te voy a dar uno que debes tener muy en cuenta para evitar dolores de cabeza e incluso prevenir o retardar la miopía. Consiste en **leer, escribir o trabajar en la mesa siempre a una distancia mínima de unos 30 cm del libro o cuaderno**. Es muy frecuente ver las cabezas pegadas a los libros y apuntes; ¡con lo que se fuerza a los ojos así! Adquirir estos hábitos y otros posturales muy saludables es difícil, sobre todo porque las malas posturas ya están muy arraigadas, pero piensa que **todo el esfuerzo que hagas por cambiarlos a positivos irá en beneficio de tu salud y de tu calidad de vida**.

3.14.- Operaciones combinadas.

Recuerda la prioridad en las operaciones:

1º) Se operan primero los paréntesis, después los corchetes y al final las llaves.
Y dentro de ellos, o fuera, se sigue así:

2ª) A continuación "**.**" y "**:**", operando de izquierda a derecha.

3º) Por último, las "**–**" y "**+**".

En los ejemplos resueltos siguientes aparecen grupos de 15 ejercicios con operaciones de :

1) Enteros.
2) Sumas y restas de fracciones con iguales denominadores.
3) Sumas y restas de fracciones con distintos denominadores.
4) Sumas y restas con enteros, fracciones y números mixtos.
5) Producto de sólo dos fracciones.
6) División de sólo dos fracciones.
7) Productos y divisiones de varias fracciones.
8) Productos y divisiones con enteros, fracciones y números mixtos.
9) Propiedad distributiva del producto con sumas y restas.
10) Propiedad distributiva de la división (¡) con sumas y restas.
11) Sacar factor común del producto con sumas y restas.
12) Sacar factor común de la división (¡) con sumas y restas.

NOTA: los números 9, 10, 11 y 12 de cada grupo se deben hacer de las dos formas, y comprobar si da igual resultado.

13) Combinadas de fracciones con (+), (–), (.) , (:), pero sin paréntesis.
14) Combinadas de fracciones con paréntesis.
15) Combinadas de fracciones, enteros y mixtos con/sin paréntesis.

1) $-(-12):(-6).2+(-1)-3\left[4.(-5)+15\right] =$
$= -4-1-3\left[-20+15\right] = -5-3.(-5) =$
$= -5+15 = 10$

2) $\frac{4}{9}-\frac{10}{9}+\frac{5}{9}-\frac{2}{9} = \frac{4-10+5-2}{9} =$
$= \frac{-3}{9} = \frac{-3}{3.3} = -\frac{1}{3}$

3) $\frac{1}{6}+\frac{7}{10}-\frac{2}{5} = \frac{1.5}{30}+\frac{7.3}{30}-\frac{2.6}{30} =$
$= \frac{5+21-12}{30} = \frac{14}{30} = \frac{2.7}{2.3.5} = \frac{7}{15}$

4) $\frac{3}{12}+2-\frac{5}{4}-3\frac{1}{8} = \frac{3}{12}+\frac{2}{1}-\frac{5}{4}-\frac{25}{8} =$
$= \frac{6}{24}+\frac{48}{24}-\frac{30}{24}-\frac{75}{24} = \frac{-51}{24} = \frac{-3.17}{2.2.2.3} = -\frac{17}{8}$

5) $\frac{6}{10}.\frac{5}{9} = \begin{cases} \frac{6.5}{10.9} = \frac{30}{90} = \frac{2.3.5}{2.3.3.5} = \frac{1}{3} \\ \frac{(2.3).(5)}{(2.5).(3.3)} = \frac{1}{3} \end{cases}$

6) $\frac{4}{15}:\frac{14}{20} = \begin{cases} \frac{4.20}{15.14} = \frac{80}{210} = \frac{2.2.2.2.5}{2.3.5.7} = \frac{8}{21} \\ \frac{(2.2).(2.2.5)}{(3.5).(2.7)} = \frac{8}{21} \end{cases}$

7) $\frac{2}{8}.\frac{5}{6}:\frac{1}{4} = \frac{2.5}{8.6}:\frac{1}{4} = \frac{2.5.4}{8.6.1} = \frac{5}{6}$

8) $\frac{9}{4}:2.\frac{16}{6}:1\frac{3}{7} = \frac{9}{4}:\frac{2}{1}.\frac{16}{6}:\frac{10}{7} =$
$= \frac{9.1}{4.2}.\frac{16}{6}:\frac{10}{7} = \frac{9.1.16}{4.2.6}:\frac{10}{7} = \frac{9.1.16.7}{4.2.6.10} = \frac{21}{10}$

9) $\frac{-2}{5}.\left(\frac{1}{4}-\frac{8}{3}\right) =$ Aplicando la prop. distributiva:
$= \frac{-2}{5}.\frac{1}{4}-\frac{-2}{5}.\frac{8}{3} = \frac{-2}{20}+\frac{16}{15} = \frac{-6+64}{60}$
$= \frac{58}{60} = \frac{2.29}{2.2.3.5} = \frac{29}{30}$

Sin aplicar la propiedad distributiva:

$= \frac{-2}{5}.\left(\frac{3-32}{12}\right) = \frac{-2}{5}.\left(\frac{-29}{12}\right) =$
$= \frac{+(2).(29)}{(5).(2.2.3)} = \frac{29}{30}$

10) $\frac{4}{3}:\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{5}\right) =$

Aplicando la propiedad distributiva:

$= \frac{4}{3}:\frac{2}{6}+\frac{4}{3}:\frac{1}{5} = \frac{24}{6}+\frac{20}{3} = \frac{24+40}{6}$
$= \frac{64}{6} = \frac{2.2.2.2.2.2}{2.3} = \frac{32}{3}$ → **MAL**

Sin aplicar la propiedad distributiva:

$= \frac{4}{3}:\left(\frac{10+6}{30}\right) = \frac{4}{3}:\left(\frac{16}{30}\right) =$
$= \frac{(2.2).(2.3.5)}{(3).(2.2.2.2)} = \frac{5}{2}$ → **BIEN**

¡OJO! Como puedes observar, la división no tiene la propiedad distributiva, y por eso no se obtiene el mismo resultado. O sea, que la primera forma de hacerlo está mal. Hay que resolverlo de la segunda forma, y el resultado correcto es "cinco medios".

11) $\frac{10}{6}.\frac{1}{5}+\frac{2}{8}.\frac{1}{5}-\frac{1}{5}.\frac{6}{2} =$

Sacando factor común:

$= \left[\frac{10}{6}+\frac{2}{8}-\frac{6}{2}\right].\frac{1}{5} = \left[\frac{40+6-72}{24}\right].\frac{1}{5} =$
$= \left[\frac{-26}{24}\right].\frac{1}{5} = \frac{-26}{120} = \frac{-2.13}{2.2.2.3.5} = -\frac{13}{60}$

Sin sacar factor común:

$= \frac{10}{30}+\frac{2}{40}-\frac{6}{10} = \frac{40+6-72}{120} = \frac{-26}{120} =$
$= \frac{-2.13}{2.2.2.3.5} = \frac{-13}{60}$ **Seguramente, la 2ª forma te parecerá mejor, ¿no? Bueno, en mi opinión sí es más práctica y rápida.**

12) $\frac{-2}{3} : \frac{5}{4} + \frac{-2}{3} : \frac{9}{6} - \frac{-2}{3} : \frac{1}{8} =$

Sacando factor común: (ASÍ ESTÁ MAL)

$$= \frac{-2}{3} : \left[\frac{5}{4} + \frac{9}{6} - \frac{1}{8}\right] = \frac{-2}{3} : \left[\frac{30+36-3}{24}\right] =$$

$$= \frac{-2}{3} : \left[\frac{63}{24}\right] = \frac{-48}{189} = \frac{-2.2.2.2.3}{3.3.3.7} = -\frac{16}{63}$$

Sin sacar factor común: (ASÍ ESTÁ BIEN)

$$= \frac{-8}{15} - \frac{12}{27} + \frac{16}{3} = \frac{-72-60+720}{135} = \frac{588}{135} =$$

$$= \frac{2.2.3.7.7}{3.3.3.5} = \frac{196}{45}$$

Como a la división no se le debe sacar factor común cuando el factor "repe" es el dividendo, pues no se ha obtenido el mismo resultado. Así que lo que está bien hecho es sin sacar factor común, es decir, la solución correcta es "ciento noventa y seis cuarenta y cincoavos".

13) $\frac{1}{12} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} - \frac{2}{3} : \frac{4}{6} =$

$$= \frac{1}{12} + \frac{3}{10} - \frac{12}{12} = \frac{5+18-60}{60} = \frac{-37}{60}$$

14) $\left(\frac{5}{8} + \frac{3}{6}\right) : \frac{1}{2} - \frac{4}{10} \cdot \frac{2}{3} =$

$$= \left(\frac{15+12}{24}\right) : \frac{1}{2} - \frac{8}{30} = \frac{27}{24} : \frac{1}{2} - \frac{8}{30} =$$

$$= \frac{3.3.3.2}{2.2.2.3.1} - \frac{8}{30} = \frac{9}{4} - \frac{4}{15} = \frac{119}{60}$$

15) $\frac{6}{4} : 3 - \frac{8}{4}\left(\frac{1}{6} + 2\frac{2}{5}\right) =$

$$= \frac{6}{12} - \frac{8}{4}\left(\frac{1}{6} + \frac{12}{5}\right) = \frac{6}{12} - \frac{8}{4}\left(\frac{77}{30}\right) =$$

$$= \frac{6}{12} - \frac{8.77}{120} = \frac{60}{120} - \frac{616}{120} = \frac{-556}{120} = -\frac{139}{30}$$

Hasta aquí el primer bloque de 15 ejercicios.

CONSEJO RENTABLE:

Muchas veces, al operar expresiones combinadas, hay que **sumar y/o restar un entero con una fracción, o viceversa.** En estas ocasiones, generalmente, conviene operar los dos (*entero y fracción, o fracción y entero, porque da igual que el entero esté delante o detrás de la fracción*) antes de seguir. Y se hace de forma rápida así: **SE MULTIPLICA (con sus signos correspondientes) EL ENTERO POR EL DENOMINADOR, SE LE SUMA O RESTA (según los signos) EL NUMERADOR Y, SIEMPRE, SE QUEDA EL MISMO DENOMINADOR.** Haciendo esto reducimos la cantidad de fracciones que hay que operar, o si sólo había eso, se termina antes que haciendo el método del mínimo. Bueno, en realidad, si pones atención y te fijas bien te darás cuenta que es lo mismo que hacer la operación poniéndole un "1" de denominador al entero y haciendo el método del mínimo, sólo que de la forma explicada es más rápido y más práctico.

Veamos algunos ejemplos de lo explicado:

16) **Operar de forma rápida, sin poner de denominador la unidad a los enteros y sin hallar el mínimo.**

a) $2 + \frac{5}{7} = \frac{2.7+5}{7} = \frac{19}{7}$

b) $1 - \frac{3}{5} = \frac{1.5-3}{5} = \frac{2}{5}$

c) $\frac{-1}{3} - 4 = \frac{(-4).3-1}{3} = \frac{-13}{3}$

Bueno, yo he efectuado todos los pasos, pero la mayor parte de las veces se debe hacer, si es posible, mentalmente, como el siguiente:

d) $\frac{4}{-3} - 5 = \frac{19}{3}$

Los siguientes para que los hagas tú.

e) $-6 - \frac{1}{9}$ **f)** $\frac{-4}{-6} - 3$ **g)** $-3 - \frac{-2}{3}$

h) $-1 - \frac{-5}{-8}$ **i)** $\frac{8}{9} + 2$ **j)** $\frac{5}{10} - 3$

k) $\frac{-3}{11} + 2$ **ℓ)** $\frac{-1}{3} - 4$ **m)** $\frac{-2}{-5} + 1$

Ahora un segundo bloque con otros ejercicios resueltos, pero con algo más de dificultad:

17) $-4\,[15 + 2.(-5) - (3.4 - 7)] - (-8) =$

$$= -4\,[15 - 10 - (12 - 7)] + 8 =$$

$$= -4.[15 - 10 - 5] + 8 = -4.[0] + 8 = 4$$

18) $\frac{-5}{6} + \frac{11}{6} - \frac{-7}{6} - \frac{1}{6} =$

$$= \frac{-5+11+7-1}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

19) $\frac{3}{20} - \frac{5}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3.2}{40} - \frac{5.10}{40} + \frac{1.5}{40} =$

$$= \frac{6-50+5}{40} = \frac{11-50}{40} = -\frac{39}{40}$$

20) $\frac{4}{6} - 3 + \frac{1}{9} - 1\frac{2}{3} = \frac{4}{6} - \frac{3}{1} - \frac{1}{9} - \frac{5}{3} =$

$$= \frac{12}{18} - \frac{72}{18} - \frac{2}{18} - \frac{30}{18} = \frac{-92}{18} = \frac{2.2.23}{2.3.3} = \frac{46}{9}$$

21) $\frac{-4}{12} \cdot \frac{3}{8} =$ | Lo hacemos de las dos formas, pero la 2ª es más práctica.

$$= \frac{-4.3}{12.8} = \frac{-12}{96} = \frac{-2.2.3}{2.2.2.2.2.3} = -\frac{1}{8}$$

$$= \frac{-(2.2).(3)}{(2.2.3).(2.2.2)} = -\frac{1}{8}$$

22) $\frac{10}{14} : \frac{6}{21} = \begin{cases} \frac{10.21}{14.6} = \frac{210}{84} = \frac{2.3.5.7}{2.2.3.7} = \frac{5}{2} \\ \frac{(2.5).(3.7)}{(2.7).(2.3)} = \frac{5}{2} \end{cases}$

23) $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{8} : \frac{1}{2} = \frac{4.15}{5.8} : \frac{1}{2} = \frac{4.15.2}{5.8.1} = 3$

Ya sólo los resolveré de la forma práctica.

24) $\dfrac{3}{6} \,.\, 5 : \dfrac{10}{4} \,.\, 2\dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{6} \,.\, \dfrac{5}{1} : \dfrac{10}{4} \,.\, \dfrac{7}{3} =$

$= \dfrac{3.5}{6.1} : \dfrac{10}{4} \,.\, \dfrac{7}{3} = \dfrac{3.5.4}{6.1.10} \,.\, \dfrac{7}{3} = \dfrac{3.5.4.7}{6.1.10.3} = \dfrac{7}{3}$

25) $\left(\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{6}{4}\right) . \dfrac{5}{-2} =$

Sin aplicar la propiedad distributiva:

$= \left(\dfrac{24 + 20 - 90}{60}\right) . \dfrac{5}{-2} = \left(\dfrac{-46}{5}\right) . \dfrac{5}{-2} = 23$

26) $\left(\dfrac{-3}{18} - \dfrac{2}{6}\right) : \dfrac{-1}{5} = \left(\dfrac{-3-6}{18}\right) : \dfrac{-1}{5} =$

$= \dfrac{-9}{18} : \dfrac{-1}{5} = \dfrac{+3.3.5}{2.3.3.1} = \dfrac{5}{2}$

¡OJO! Repasa el nº 10 de la página 109. Y ahora resuélvelo tú así: $\dfrac{-3}{18} : \dfrac{-1}{5} - \dfrac{2}{6} : \dfrac{-1}{5} = \ldots$

¿Qué ha sucedido?

27) $\dfrac{2}{8} : \dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{6} \,.\, \dfrac{9}{2} + \dfrac{4}{16} : \dfrac{1}{3} =$

$= \dfrac{8}{24} - \dfrac{45}{12} + \dfrac{12}{16} = \dfrac{16}{48} - \dfrac{180}{48} + \dfrac{36}{48} =$

$= \dfrac{-128}{48} = -\dfrac{2.2.2.2.2.2.2}{2.2.2.2.3} = -\dfrac{8}{3}$

28) $\left(\dfrac{-1}{2} : \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{10}\right) . \dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{6} \,.\, \dfrac{3}{5} =$

$= \left(\dfrac{-4}{6} - \dfrac{2}{10}\right) . \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{30} = \left(\dfrac{-20-6}{30}\right) . \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{30} =$

$= \left(\dfrac{-26}{30}\right) . \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{30} = \dfrac{-104}{150} + \dfrac{3}{30} = -\dfrac{89}{150}$

29) $\dfrac{3 - \dfrac{5}{6} - 2\dfrac{1}{4}}{\dfrac{4}{5} : \dfrac{2}{3} - 2} = \dfrac{\dfrac{3}{1} - \dfrac{5}{6} - \dfrac{9}{4}}{\dfrac{12}{10} - \dfrac{2}{1}} =$

$= \dfrac{\dfrac{36 - 10 - 27}{12}}{\dfrac{12 - 20}{10}} = \dfrac{\dfrac{-1}{12}}{\dfrac{-8}{10}} = \dfrac{-1}{12} : \dfrac{-8}{10} =$

$= \dfrac{-10}{-96} = \dfrac{5}{48}$

30) $\dfrac{\dfrac{5}{6} : \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3} \,.\, \dfrac{5}{6}}{\left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{5}\right) - 2} = \dfrac{\dfrac{20}{6} + \dfrac{10}{18}}{\left(\dfrac{1+4}{10}\right) - 2} =$

$= \dfrac{\dfrac{70}{18}}{\dfrac{-15}{10}} = \dfrac{70}{18} : \dfrac{-15}{10} = \dfrac{700}{-270} = -\dfrac{70}{27}$

Bueno, creo que es un aceptable compendio de ejercicios **RESUELTOS** de todo tipo sobre fracciones. Y espero que te sirvan bastante para aprender bien el cálculo de fracciones, que sin lugar a dudas te será fundamental en este curso y los siguientes. Cuando intentes hacer estos ejercicios resueltos, no te rindas "a las primeras de cambio" y te fijes cómo se hace, sino que debes esforzarte en resolver por ti mismo hasta llegar lo más cerca posible de la solución.

EJERCICIOS

Ejercicios 31 al 41 resueltos en las págs 181, 182 y 183.

31) $(-18):(-3).(-2) - 5\left[-5.2 - (-12)\right] =$

32) $\dfrac{8}{5} - \dfrac{3}{5} + \dfrac{7}{5} - \dfrac{2}{5} =$

33) $\dfrac{2}{4} + \dfrac{4}{20} - \dfrac{1}{10} =$

34) $\dfrac{4}{10} - 3 + \dfrac{1}{6} - 2\dfrac{3}{5} =$

35) $\dfrac{3}{8} \,.\, \dfrac{4}{6} =$

36) $\dfrac{5}{3} : \dfrac{12}{18} =$

37) $\dfrac{1}{4} \,.\, \dfrac{6}{8} : \dfrac{3}{12} =$

38) $\dfrac{6}{5} : 3 \,.\, \dfrac{15}{4} : 2\dfrac{1}{6} =$

39) $\dfrac{-1}{3} . \left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{6}\right) =$ | Hazlo aplicando la prop. distributiva y sin aplicarla.

40) $\dfrac{2}{6} : \left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{8}{3}\right) =$ | Hazlo aplic. la prop. (¡) distributiva y sin aplicarla.

41) $\dfrac{4}{3} \,.\, \dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{3} \,.\, \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{4} \,.\, \dfrac{4}{3} =$

| Hazlo sacando factor común y sin sacarlo.

42) $\dfrac{2}{5} : \dfrac{5}{-4} + \dfrac{2}{5} : \dfrac{-9}{6} - \dfrac{2}{5} : \dfrac{1}{8} =$

| Hazlo sacando factor común (1) y sin sacarlo.

43) $\dfrac{2}{8} + \dfrac{4}{5} \,.\, \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{10} : \dfrac{2}{4} =$

44) $\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{3}\right) : \dfrac{3}{5} - \dfrac{6}{8} \,.\, \dfrac{1}{2} =$

45) $\dfrac{4}{6} : 2 - \dfrac{5}{2}\left(1\dfrac{2}{3} - \dfrac{7}{6}\right) =$

46) Operar de forma rápida, sin poner de denominador la unidad a los enteros y sin hallar el mínimo.

a) $1 + \dfrac{3}{6}$ b) $2 - \dfrac{4}{3}$ c) $\dfrac{-2}{5} - 3$

d) $\dfrac{1}{-2} - 4$ e) $-5 - \dfrac{4}{5}$ f) $\dfrac{-3}{-4} - 1$

g) $-4 - \dfrac{-4}{5}$ h) $-2 - \dfrac{-3}{-4}$ i) $\dfrac{1}{4} + 1$

j) $\dfrac{6}{8} - 1$ k) $\dfrac{-4}{10} + 3$ l) $\dfrac{-5}{6} - 2$

47) $4 - 2\left[15 + 3.(-2) - (3 - 7.2)\right] - 6 =$

48) $\dfrac{-15}{10} - \dfrac{11}{10} + \dfrac{-9}{10} - \dfrac{-5}{10} =$

49) $\dfrac{2}{16} - \dfrac{10}{8} + \dfrac{5}{6} =$

50) $\dfrac{\dfrac{1}{2} - 4 + \dfrac{3}{6} - 2\dfrac{1}{4}}{\dfrac{6}{4} - \dfrac{2}{15} \,.\, \dfrac{3}{4}} =$

51) $\dfrac{-4}{5}\cdot\dfrac{10}{-6}=$

52) $\dfrac{12}{15}:\dfrac{8}{10}=$

53) $\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{3}{4}:\dfrac{18}{12}$

54) $\dfrac{4}{8}\cdot 2:\dfrac{12}{5}\cdot 1\dfrac{1}{10}=$

55) $\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{6}{5}-\dfrac{10}{3}\right)\cdot\dfrac{1}{-6}=$

| **Hazlo aplicando la prop. distributiva y sin aplicarla.**

56) $\left(\dfrac{-3}{12}-\dfrac{1}{4}\right):\dfrac{2}{3}=$

| **Hazlo aplicando la prop. distributiva y sin aplicarla. (i)**

57) $\dfrac{1}{6}:\dfrac{4}{10}-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}:\dfrac{6}{4}=$

Estos últimos para aquellos alumnos que se sientan capacitados y quieran intentarlos.

58) $\left(\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{8}{3}\right):\dfrac{-1}{4}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{6}=$

59) $\dfrac{1-\dfrac{4}{8}-3\dfrac{4}{5}}{\dfrac{2}{3}:\dfrac{1}{5}-3}=$

60) $\dfrac{\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{-2}{4}-\dfrac{1}{2}:\dfrac{8}{4}}{\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{5}\right):2}=$

61) $\dfrac{\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{-3}{5}-\dfrac{2}{6}\right):\dfrac{1}{2}}{2:\left(\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{-5}\right)}=$

62) $\dfrac{\left(\dfrac{4}{3}:\dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{4}\right)\cdot\dfrac{1}{-4}+\dfrac{3}{2}}{1-\dfrac{5}{2}+2\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{6}:\dfrac{1}{5}\right)}=$

Complicados, ¿verdad?

Cuestiones diversas

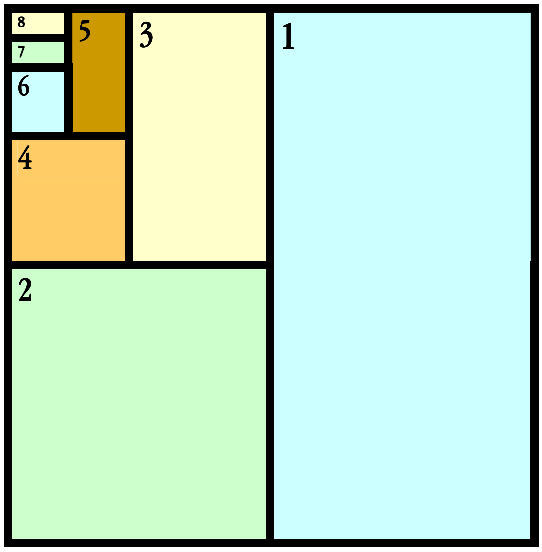
1. Calcula esta expresión sin hacer cuentas, es decir, sólo mentalmente. Y explicas cómo lo haces.

$3/6 \;-\; 6/15 \;+\; 15/30 \;-\; 1/3.$

2. ¿Recuerdas el "caso del chocolate" para comprobar gráficamente la igualdad de las fracciones equivalentes? Bueno, si no es así, repásalo (pág. 94). Este ejercicio consiste en lo siguiente: demostrar gráficamente, pero no con las tabletitas como ya se hizo sino en líneas rectas racionales, que las partes comidas por aquel grupo de amigos/as eran iguales.

3. Como sabes, la simplificación de una fracción puede ser parcial o total. Pregunto: ¿Por qué número hay que dividir una sola vez a numerador y denominador para tener una simplificación total, es decir, para obtener la fracción irreducible?

4. ¿Qué parte de la figura representa cada uno de los cuadriláteros numerados que hay en la siguiente figura?



5. ¿Qué propiedades, de las vistas en la suma de fracciones, tiene la resta de fracciones? (i) Poner ejemplos.

6. ¿Qué te dice, rápidamente, una expresión de operaciones con fracciones que tenga lo siguiente:

– [– (. . . fracciones . . .)]?

7. Escribe las equivalencias fundamentales de la RESTA (sustracción) con un ejemplo de cada una.

8. De las propiedades estudiadas en el producto de fracciones, ¿qué propiedades tiene la división de fracciones? (i) No vale decir sólo tal o cual, sino que es necesario explicarlo y poner ejemplos

9. En los cursos de Primaria se aprenden las equivalencias fundamentales de la división. Exprésalas de forma algebraica, utilizando letras *(D, d, c, r)*, y con un ejemplo numérico de cada una de las citadas equivalencias

10. Una dificililla: ¿Qué quiere decir que una operación matemática tiene la Ley de Composición Interna?

3.15.- Problemas resueltos sobre fracciones.

1.- ¿Qué fracción de mes representan: a) una semana, b) 3 días, c) una quincena y d) 10 días?
Recordemos: el denominador las partes en que se divide la unidad (un mes) y el numerador las partes que tomamos/cogemos.

SOLUCIONES:

a) **7 / 30** **c)** 15 / 30 = 3.5 / 2.3.5 = **1 / 2**
b) 3 / 30 = 3 / 2.3.5 = **1 / 10** **d)** 10 / 30 = 2.5 / 2.3.5 = **1 / 3**

2.- Pablo terminó la Enseñanza Primaria con unas excelentes calificaciones. Su madre, para celebrar el paso a la E.S.O., le hizo una estupenda tarta de zanahoria. Al día siguiente comentaba Pablo a su amiga Raquel: *"Tanto me gustó que **comí los 7/5 de la tarta**".* ¿Qué tienes que decir del comentario que hizo Pablo?

SOLUCIÓN:

Era imposible que Pablo se comiera los 7 / 5 de la tarta,
porque esa fracción quiere decir que la tarta se dividió en 5 partes y se comió 7 partes ¿...?
Y eso, como comprenderás, es irrealizable.

3.- ¿Qué fracción de vino debes **añadir** a un recipiente que contiene **3 / 10** de litro para completar un litro?

SOLUCIÓN:

Como el recipiente tiene 3 partes de las 10 en que se ha dividido un litro (la unidad), pues todavía faltan 7 partes de las 10 para completar el litro, o sea, 7 / 10.
NOTA: haciendo una operación sería: **10 / 10 – 3 / 10 = 7 / 10**

4.- Javi ha perdido, jugando con los amigos en el recreo, **35 canicas**, y le hizo muy poca "gracia". Si esa cantidad corresponde a **los 7 / 12** del total que tenía, **¿cuántas** docenas de bolindres (canicas) **tenía** antes de empezar a jugar?

SOLUCIÓN:

Dice que perdió las 7 / 12 partes del total que tenía**.** Veamos**:**
Las que tenía se dividieron en 12 montoncitos (partes) iguales, y de esos 12 perdió 7 partes, que son 35**.** Si 35 canicas corresponden a 7 partes**,** 1 sola parte es 5 canicas (**35 : 7 = 5).**
Y ya tenemos el total**:** 12 partes por las 5 canicas de cada parte**,**
o sea**, el total era de 60 (12 . 5 = 60) canicas, que son 5 docenas (60 : 12).**

SOLUCIÓN GRÁFICA:

5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

La parte rayada son los 7/12, que en la realidad son 35 canicas. O sea, 7 partes 35, luego 1 parte corresponde a 5 canicas. Y como se han hecho 12 partes, pues el total era de 60 bolindres (5 docenas).

5.- Un grupo de amigas del I.E.S. **"Méléndez Valdés"** disfruta conversando sobre las próximas vacaciones de Navidad. Se lo pasan "bomba" pensando en ellas; hacen bien. **Tulia** dice que se va a pasar las **4 / 10** partes de las vacaciones descansando. No está mal. **Victoria** dice que ella sólo descansará los **2 / 5**; se considera más trabajadora y responsable. Sin embargo, **Sonia** piensa relajarse plácidamente las **12 / 30** partes de las Navidades. *(Está bien pensar tanto en el descanso vacacional, sobre todo si has trabajado y rendido a lo largo del primer trimestre. Aunque seguro que los que más cavilan sobre la "buena vida" (?) en vacaciones además se han "tirado" un trimestre vago.)*
Bien, dejemos el "rollo". ¿Quién **descansará más** durante esas Navidades?

SOLUCIÓN:

1ª forma) Si ***simplicamos*** las fracciones obtenemos:

✻ 4 / 10 = 2.2 / 2.5 = **2 / 5** ✺ **2 / 5** es irreducible ✼ 12 / 30 = 2.2.3 / 2.3.5 = **2 / 5** ✻

Es decir, que en realidad todas **descansarán**, Dios mediante, **lo mismo.**

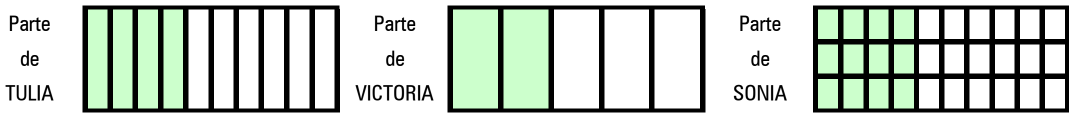
2ª forma) ***Reduciendo a M.D.C.*** obtenemos:

10 = 2.5
5 = 5 ➠ **m.c.m.** (10, 5 y 30) = 2.3.5 = **30** ➠
30 = 2.3.5

4 / 10 = 4.3 / 10.3 = **12 / 30**
2 / 5 = 2.6 / 5.6 = **12 / 30**
12 / 30 = 12.1 / 30.1 = **12 / 30**

Y comprobamos de esta forma que los descansos *(¡Que los disfruten!)* van a ser todos iguales, ***ya que las fracciones inicales son equivalentes.***

3ª forma) ***Gráficamente*** sería:



6.- Un trabajador fijo ("*especie a extinguir*") ha realizado un trabajo extra ("*encima*") y ve aumentandos sus ingresos mensuales en **tres onceavas partes**. ¿Cuánto cobra al mes si su **sueldo** habitual es de 2145 euros?

SOLUCIÓN:

Calculamos la fracción (3/11) de una cantidad (2145).

3 / 11 de 2145 € = 3 . 2145 / 11 = 6435 / 11 = 585 €.

Al sueldo (2145 €) le sumamos el trabajo extra (585 €) y obtenemos que **ganó, en ese afortunado mes, la apreciable cantidad de 2730 €.**

7.- La **diferencia entre dos fracciones** es 4 / 10. Si una de las dos es 6 / 12, ¿qué fracción es la otra?

SOLUCIÓN:

Es necesario recordar las **equivalencias** fundamentales **de la sustracción (resta).** ¿Te acuerdas?

Son éstas: **1ª)** **M** (minuendo) – **S** (sustraendo) = **D** (diferencia)
2ª) **M** – **D** = **S**
3ª) **M** = **D** + **S** ⇨ *Es ésta la que interesa aplicar.*

M = S + D = 4 / 10 + 6 / 12 ⇨ **m.c.m. de 10 (2.5) y 12 (2^2.3) = 60 (2^2.3.5)**
= 4.6 / 10.6 + 6.5 / 12.5 = 24 / 60 + 30 / 60 = 54 / 60

La solución es la fracción 54 / 60 ,

que hay que simplificar como venimos diciendo: $\dfrac{2.3.3.3}{2.2.3.5} = \dfrac{9}{10}$

8.- Ataulfo, acaudalado padre de cuatro hijos, decide repartir sus propiedades entre sus descendientes al llegar éstos a una edad adecuada. Lógicamente, como todos se lo merecían, las cuatro partes que hizo Ataulfo para sus hijos/as eran semejantes en valía. Entre las propiedades que **heredaron** había una gran finca, que como no era igual de productiva por todo el terreno, se repartió de la siguiente forma:

- Para **Rigoberto, los 3 / 10** de la finca.
- Para **Casilda los 2 / 6.**
- Para **Timoteo 1 / 4.**
- Y para **Prudencia el resto.**

a) ¿Qué fracción le correspondió a Prudencia?
b) Si la finca tenía 60 ha (hectáreas), ¿cuántos **m²** recibieron entre **Rigo y Pruden**?

SOLUCIONES:

Bueno, ya he apretado un poco el acelerador de la dificultad, ¿verdad?
En primer lugar, si ***pensamos*** un poco, que es lo más esencial para resolver un problema, veremos que hemos de sumar lo heredado que sí conocemos, o sea, lo de los tres primeros.

3 / 10 + 2 / 6 + 1 / 4 ⇨ m.c.m. de 10 (2.5), 6 (2.3) y 4 (2^2) = 2^2.3.5 = 60
3.6 / 10.6 + 2.10 / 6.10 + 1.15 / 4.15 = 18/60 + 20/60 + 15/60 = 53/60

Esta fracción obtenida, **53/60**, es la parte de los tres hermanos primeros.
¿Y qué quiere decir?
Poniendo en práctica las dos variantes de la memoria que más influyen en tu rendimiento escolar (si las practicas),
a saber, la memoria auditiva y la visual, tendrás la solución.
Veamos: si tenemos 53 /60, eso quiere decir que la finca se divide en 60 partes y entre los tres primeros hermanos se han repartido 53 partes.

Está claro, ¿no? A Prudencia le tocó 7 partes de las 60.
O sea, en forma fraccionaria los 7 / 60 de la finca.

En realidad, la operación sería ésta: **60 / 60** (la finca entera) **–** **53 / 60** (parte de tres hermanos) **= 7 / 60**
Observa que, como tienen los mismos denominadores, sólo es necesario restar directamente los numeradores (60 – 53 = 7).

Y para terminar, calculamos el **apartado b):**
¿Y qué es eso de "ha" (hectárea)? Pues **para saberlo: o memoria, o consulta.**
La "ha" es una unidad de superficie, empleada habitualmente en la medición de terrenos, fincas, campos, etc.
1 ha = 1 hm² = 10000 m² ➡ luego, 60 "ha" = 60 . 10000 m² = **600000 m²** (superficie de la finca)

Así que como hay que saber los m² que han heredado entre Rigo y Pruden, sumamos sus partes:
3/10 + 7/60 = 3.6/10.6 + 7.1/10.1 = 18/60 + 7/60 = **25/60** ***(parte conjunta de los dos).***

Y, por fin (¡perdón por tantas explicaciones a los que no necesitáis tantas!), calculamos la fracción (25/60) de una cantidad (600.000 m²):

25 / 60 de 600.000 m² = 25 . 600000 / 60 = 15000000 / 60 = 250.000 m²

Entre Rigoberto y Prudencia heredaron 250.000 metros cuadrados de la finca.

9.- Un comerciante ha vendido los **4 / 7** de un depósito de aceite de oliva, y todavía quedan 900 litros. ¿Cuántos **"dal"** tiene **de capacidad** el depósito?

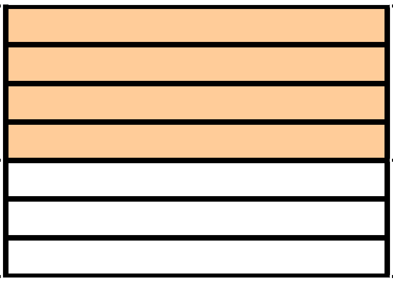
S O L U C I Ó N:

El depósito entero (una unidad) es en forma de fracción **7 / 7 ;**
como ha vendido **4 / 7 ,** le quedan **3 / 7 (7 / 7 – 4 / 7 = 3 / 7).**
Esos **3 / 7** corresponden a **900 litros,** según dice el enunciado ("...quedan 900 litros...").
Es decir, que las tres partes de las siete que quedan son 900 litros;
luego **una parte es 300 litros** (900 : 3 = 300).
Si el depósito se dividó en 7, en total tiene 2100 litros
(7 partes . 300 ℓ de cada una = 2100 ℓ).

Convertimos "ℓ" en "daℓ" (decalitros) dividiendo por 10:
2100 ℓ → 2100 : 10 = 210 daℓ.

La capacidad del depósito es de 210 dal (decalitros).

De forma gráfica :

Parte vendida		**Son 4 / 7 del tonel**
Parte que queda		**3 partes tienen 900 litros**

Así que 1 parte corresponde a 300 litros, y como hay 7 partes, pues el tonel tiene una capacidad de 2100 litros.

10.- Se está recogiendo la aceituna de una gran **olivar**. El **lunes** se empezó recogiendo **3 / 8** de toda la extensión; el **martes**, que la lluvia arreció casi toda la mañana, sólo fue posible recoger una **quinta parte** del olivar, y el **miércoles** se **concluyó** la recogida del fruto que produce el aceite mejor del planeta. ¿Qué día fue mayor la recolección?

SOLUCIÓN:

Empecemos sumando lo recogido lunes y martes:
3 / 8 + 1 / 5 = 15 / 40 + 8 / 40 = 23 / 40

Este resultado, 23 / 40 , quiere decir que de las 40 partes del olivar,
el lunes y martes ya llevaban recogidas 23 partes; o sea, quedaban 17 partes de las 40 (17 / 40).
Operando: 40 / 40 (olivar entero) – 23 / 40 (recogido dos días) = **17 / 40 (miércoles).**
Tenemos estas tres fracciones: 15 / 40 (lunes), 8 / 40 (martes) y 17 / 40 (miércoles).

Como tienen el mismo denominador,
es obvio que **fue mayor la recogida de aceituna del miércoles.**

11.- Una **vuelta ciclista** a La Comarca de Tierra de Barros consta de **180 kilómetros.** A las 11.30 de la mañana lleva recorrido el pelotón las **5 / 9** partes de la carrera. Si la velocidad media se calcula en 40 km/h, ¿cuántos **"hm" faltan** para llegar a la meta, colocada este año enfrente del hermoso y creciente parque de Villafranca?

SOLUCIÓN:

En ocasiones, el enunciado de un problema es algo "engañoso", "lioso", como decís vosotros.
En este caso, contiene datos que no te sirven para resolver el problema,
si acaso sólo para desorientarte un poco, pero así aprendes a "separar el grano de la paja",
quedándote únicamente con lo esencial y necesario.
Los problemas, no éstos de Mate, los de la vida, no se acaban casi (?) nunca. Pero ésa es la vida.
Tú, si no quieres "estancarte", no des la espalda a los problemas. Aprende a "plantarles cara",
a "enfrentarlos", a "luchar **con** ellos". Al principio, lo más cómodo es no darles la cara;
pero tarde o temprano te buscan y te encuentran. Y lo mejor es estar preparado... Bien, al grano.
Si la vuelta tiene 180 km y se ha dividido, fraccionariamente, en 9 partes (denominador),
eso quiere decir que una parte corresponde a 20 km (180 : 9 = 20).
Como ya llevan recorridos 5 / 9 de la carrera, **les faltan 4 / 9.**
Y 4 partes corresponden a 80 km **(4 . 20 = 80).** Y 80 km = 80 . 10 hm = **800 hm.**

Faltan 800 hm para que lleguen a percibir el frescor y verdor de nuestro atractivo parque.

12.- A Daniel le han correspondido **3 / 8 de 2 / 5 de un premio** obtenido por una Peña en la **Lotería Primitiva** que ascendió a 1 millón de euros. ¿Tú crees que con su parte podrá comprar un piso céntrico valorado en 180.000 euros?

SOLUCIÓN:

En primer lugar, recuerda siempre que la palabra **"de"** va a significar **multiplicar** (un producto).
Dicho esto, operemos para calcular la parte de Daniel:

3 / 8 de 2 / 5 de 1000000 € = 3.2.1000000 / 8.5 = 6000000 / 40 = 150.000 €

Como los pisos tienen los precios por la nubes,
a pesar de tocarle nada más y nada menos que casi 25 millones de las antiguas pesetas,
todavía no tiene bastante (¡).

13.- Las/os alumnas/os de 1º de E.S.O. del I.E.S. "Meléndez Valdés" de Villafranca de los Barros tienen unos hábitos de estudio casi excelentes. Veamos "como muestra un botón": una tarde cualquiera de trabajo de Nuria consiste en dedicar 2 horas a Lengua, $1\frac{3}{5}$ (nº mixto) de hora para Matemáticas y 4 / 9 de hora para Inglés. (Ella, aconsejada por su madre, sabe que es muy conveniente estudiar casi todos los días las asignaturas de Lengua y Mate -son, quizás, las más importantes, extensas y difíciles- , y las demás en los días correspondientes). Expresa en forma de nº mixto la fracción total de horas que estudió Nuria esa tarde.

SOLUCIÓN:

NOTA: *tanto los números enteros como los números mixtos debes transformarlos en fracciones.*

$$2/1 + 1\frac{3}{5} + 4/9 = 2/1 + 8/5 + 4/9 =$$

$$= 2.45/1.45 + 8.9/5.9 + 4.5/9.5 = 90/45 + 72/45 + 20/45 =$$

$$= 182/45 \succ (182 : 45) \succ 4\frac{2}{45} \text{ (nº mixto)}$$

➔ estudió 4 horas y $\frac{2}{45}$ de hora.

14.- Clodomiro realizó los **5 / 7** de un trabajo y le pagaron **800 euros**. Averigua **cuánto** hubiera recibido por **el trabajo completo.**

SOLUCIÓN:

El señor Clodo tenía un trabajo dividido en 7 partes (denominador), pero sólo concluyó 5 partes (numerador), por las que le dieron 800 **€; eso quiere decir que a** *una parte* le correspondía *160* **€** (800 **:** 5**).** Ya está "chupao"**:** como eran 7 partes**,**

por todo el trabajo le hubieran dado 1120 € (160 . 7).

CON UNA ECUACIÓN:

Para que te vaya "sonando", verás cómo se resuelve el problema con una ecuación, aunque todavía en 1º de ESO no las hemos explicado, pero bueno**...**

$\frac{5}{7}$ de "x" $=$ 800 → siendo "x" el trabajo total, la incógnita.

$5x = 7 \cdot 800 \rightarrow 5x = 5600 \rightarrow x = \frac{5600}{5} = 1120$ **euros**

15.- En una superficie de **15 "ca"**, ¿cuántos trozos de **3 / 2 cm²** hay?

ACLARACIÓN: Hay muchos tipos de problemas que necesitan UN AJUSTE, que puede ser PREVIO (antes de empezar a resolver) O FINAL (después de haber resuelto lo principal). ¿Por qué? Bien, es muy sencillo: ¿crees que está bien operar euros con pesetas, o km con m? No, verdad. Pues por eso precisamente. Veamos: en este problema tenemos dos unidades de medidas de superficie (áreas), que son la **"ca"** (unidad agraria que equivale a **1 m²**) y el **cm²**. Debemos reducir todo a **m²** o a **cm²**. En este caso mejor lo 2º.

⊗ AJUSTE PREVIO : 15 ca → 15 m^2 → 15 . 10000 = 150000 cm^2

⊗ Para saber cuántos trozos caben hay que dividir el total (150000 cm^2) por cada trozo ($\frac{3}{2}$ cm^2):

$150000 : \frac{3}{2} = \frac{150000 \cdot 2}{3} = 100000$ trozos.

⊗ **SOLUCIÓN → En 15 "ca" caben 100000 trozos de 3/2 cm².**

16. - El señor Aurelio va a repartir su herencia entre sus dos hijos, pero antes tiene que abonar una cantidad que corresponde a las tres séptimas partes del total de la herencia. Sabemos también que al hijo mayor le correspondió 2 / 5 partes del resto de la herencia una vez pagada la deuda citada y al otro 1 / 4 de dicha herencia. Los 7.000 euros restantes los donó a una O.N.G. de confianza. ¿A cuánto ascendía el total de la herencia antes de pagar la deuda?

⊗ Paga $\frac{3}{7}$ y le quedan $\frac{4}{7}$ ⊗ Hijo 1º → $\frac{2}{5}$ de $\frac{4}{7} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \frac{8}{35}$ ⊗ Hijo 2º → $\frac{1}{4}$ de $\frac{4}{7} = \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 7} = \frac{4}{28}$

⊗ $\frac{8}{35} + \frac{4}{28} = \frac{32 + 20}{140} = \frac{52}{140} \rightarrow \left\{ \text{Recibieron los hijos} \right.$ ⊗ $\left\{ \text{Sumamos el pago inicial y lo de los hijos} \right\} \rightarrow \frac{3}{7} + \frac{52}{140} = \frac{60 + 52}{140} = \frac{112}{140}$

⊗ Entre el pago inicial y los hijos se llevaron 112 partes de las 140 de la herencia, luego quedaron :

$\frac{140}{140} - \frac{112}{140} = \frac{28}{140}$ → Para la ONG.

Y si 28 partes corresponden a 7.000 €, cada parte es de 250 € $\left(\frac{7000}{28} = 250 \right)$.

⊗ Luego el total es de 140 partes . 250 € = 35000 euros :

⊗ **Solución → La herencia inicial era de 35000 €.**

☹ 3.16.- PROBLEMAS SOBRE FRACCIONES ☺

☞ NIVEL I ☜

1) En una celebración de cumpleaños, Dulia se comió los 2/7 de la tarta, Merche los 3/7 y Leonor 1/7. ¿Quién comió más y quién menos? ¿Sobró algo? ¿Cuánto?

2) Tres amigos tienen que repartir un premio que les ha tocado en una Lotería Primitiva. A Víctor le corresponde 5/10, a Samuel los 3/10 y a Sinforoso 4/10. ¿Es posible? ¿Por qué?

3) Unos amigos juegan en un descampado. Hacen partes y deciden repartirse el terreno. A Timoteo le tocan los 10/8, a Melquiades 10/4, a Virgilio 10/20 y a Tiberio 10/10. Sin hacer operaciones, ¿a quién correspondió más y a quién menos? ¿A quién le tocó más de una parte y a quién menos? ¿A alguien le tocó justamente una parte?

4) En una clase de 1º de E. S. O. hay 24 alumnos. En el mes de abril fueron de excursión. Por diversas causas, sólo disfrutó de la excursión los 7/8 de la clase. ¿Cuántos alumnos no fueron?

5) Cayetana, Onofre, Olegario y Urbana se reparten 9 mandarinas. Expresa en forma de fracción cuánto corresponde a cada uno.

6) ¿Qué parte hay que añadir a 4/5 litros de aceite para tener un litro? ¿Y qué parte hay que añadir a 7/6 kilogramos de naranjas para obtener un kilo? (¡)

7) Silvestre le da 6/7 de sus canicas a Wifredo y le quedaron 12. ¿Cuántas tenía antes?

8) Narcisa llevaba una cesta con tres docenas de huevos. En el camino a casa se cruza con ella Mauricio, que iba corriendo, y debido al choque se cae la cesta, rompiéndose los 7/9 de los huevos. ¿Cuántos quedaron "sanos" en la cesta?

9) Demetrio le dice a su amiga Damiana que los 9/8 de un Instituto son niñas. ¿Qué tienes que decir al respecto de ese comentario?

10) Fulgencia sale de casa a realizar la compra. Gasta en un comercio 2/7 partes del dinero que lleva, en otro 1/3 y, al regresar a casa, se encuentra con Celestina que le pide prestado una cantidad hasta el día siguiente. Dicha cantidad corresponde a los 3/10 del total. ¿Con cuánto dinero volvió a casa si salió de ella con 210 euros?

11) El señor Simeón había leído los 2/10 de los libros de la biblioteca y el señor Néstor los 4/20. ¿Quién había leído más?

12) El café necesita tostarse antes de ser vendido. Cada vez que se tuesta pierde 1/6 del peso que es tostado. Si una empresa tuesta 3000 kg y lo vende a 9'45 €/kg, ¿cuánto obtiene de la venta?

13) En una fiesta se juntan Modesta, Clara, Dionisio, Nicolás, Tecla, Rosendo e Ignacia. Cada uno se bebió 4/7 de litro de refresco. ¿Cuánto bebieron entre todos?

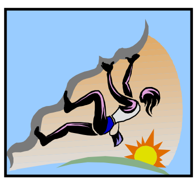
14) Valeria, Wenceslao, Blas, Cesárea y Severo deben vender un taco de papeletas de una rifa para la excursión de fin de curso. ¿Qué parte del taco debe vender cada uno?

15) Unos amigos acertaron un buen premio de una quiniela. Como todos no aportaban el mismo dinero, se lo repartieron de esta manera: Remigio los 3/10, Inocente los 4/12, Higinio los 2/6 y el resto para Catalino. ¿Qué parte tocó a este último?

☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹

En alguna ocasión escuché en una tertulia de las muchas e interesantes que hay en la radio, que no en las televisiones, a un profesor –creo recordar que de Filosofía– que <u>para llegar a comprender y conocer el verdadero potencial humano es imprescindible el ineludible enfrentamiento con el dolor</u>.

Bueno, <u>no se trata en esta reflexión de que los alumnos sufran y sientan dolor, ni mucho menos</u>. El propósito al comentar el pensamiento del profesor tertuliano es decir algo semejante pero trasladado al mundo de la Educación de niños, adolescentes y jóvenes. Desde mi punto de vista, y creo que el de muchos profesionales docentes con los que me relaciono, <u>no podemos llegar a comprender y conocer el verdadero potencial de cualquier alumno sin el ineludible enfrentamiento de éste con el ESFUERZO</u>.



Para entender lo que quiero expresar, sólo hay que comparar lo que aprendemos de forma cómoda, casi sin ganas, con algo que nos ha costado mucho esfuerzo. <u>Piensa tú en algo que te costó mucho conseguir y otra cosa que lograste sin apenas esforzarte</u>. ¿Lo valoras igual? ¿De cuál de esas cosas que has pensando te sientes más orgulloso? ¿Cuál de ellas le da más sentido a tu vida?

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

☹ 3.17.- PROBLEMAS SOBRE FRACCIONES ☺

☞ NIVEL II ☜

1) Un padre reparte la herencia correspondiente a su fincas entre sus tres hijos: a Telmo le corresponde 67/6 "ha", a Nuria 51/4 "ha" y para Abel 63/5 "ha". ¿Qué superficie total repartió?

2) ¿Cuánto costarán $4\frac{1}{5}$ metros de tela a $3\frac{2}{5}$ euros el metro?

3) De una pieza de tela de $25\frac{1}{2}$ metros. Se cortan una vez 3 metros, otra vez $6\frac{2}{3}$ metros, y, por último, $12\frac{4}{5}$ metros. ¿Cuánto quedó?

4) ¿A qué fracción le faltan 3/6 para obtener 6/5?

5) Elisenda vive a 5/8 de km del Instituto y Anselma a ¼ de km. ¿Quién vive más cerca? ¿Cuántos metros recorre una más que otra cada día?

6) En un país europeo las 7/10 partes de sus habitantes son nativos, las 3/11 partes son procedentes de otros paises europeos y el resto de los demás continentes. Calcula, en primer lugar, qué parte de los habitantes no son europeos y, después, cuántos hay de cada si el país tiene 44 millones de habitantes.

7) Un dibujante hace un retrato a una persona en ¾ de hora. ¿Cuántos retratos realizará en 6 horas? (Nota: no vale hacerlo sin operar fracciones)

8) Se reparten los 12/18 de una herencia entre 6 personas. ¿Qué parte corresponde a cada una?

9) Luciano gasta 6/8 partes del dinero que llevaba en unas compras. Si le quedan 128 €, ¿cuánto tenía al principio?

10) ¿A cuántos minutos corresponden los 3/4 de los 2/5 de una hora?

11) Hilario monta un tractor que va a una velocidad media de 20 km/h. ¿Cuántos metros recorrerá en 3/5 de hora?

12) Cosme tiene 600 €. Un día gasta 2/5 partes y otro 2/3 de lo que le quedaba. ¿Cuánto le sobró?

13) ¿Cuántos segundos son 3/4 de 1/6 de 20/45 días?

14) ¿Cuántas cajas de 5/125 metros cúbicos de volumen caben en una más grande de 40/25 metros cúbicos?

15) En una clase de E. S. O. de 40 alumnos hay 3/5 que estudian Inglés, 1/4 que estudia Francés y el resto otro idioma. ¿Cuántos estudian cada idioma?

16) Patricio ha heredado 28000 €. Si este dinero representa los 5/8 de la fortuna de sus padres, ¿cuánto dinero heredó su hermana Bernardina que recibió 1/4 de la fortuna de sus padres?

En bastantes reflexiones hemos quedado muy claro que la educación y los valores se empiezan a adquirir y se consolidan en el seno de la familia. En esta reflexión, partiendo de ese principio, comentamos una de las muchas causas por las que quizás ni la educación que emana de algunas familias es la más satisfactoria ni la escala de valores que impregnan a sus hijos es la más conveniente. Nos referimos al SABER DECIR NO.

Los padres, tanto la madre como el padre, cada uno en su momento, debemos aprender cuanto antes a saber decir no a nuestros hijos en aquellas situaciones que así lo requieran, sobre todo en las edades más tempranas, para que no les choque la oportuna prohibición en otras edades más difíciles. Claro, es evidente que para ello se necesita tener muy claro a qué le tenemos que decir sí y a qué no, porque si los propios padres actuamos de forma confusa…

A ver, ¿es conveniente decir NO a la acumulación de cosas innecesarias? ¿Es provechoso decir NO a algunos caprichos antojadizos de un hijo? ¿Es bueno decir NO al excesivo uso de marcas en ropas y calzado? ¿Es positivo decir NO a la comodidad cuando ésta se aprovecha para dejar de hacer algo que hay que hacer? ¿Es oportuno decir NO al borreguismo de modas y otras costumbres nocivas (colgantes en labios, orejas, cejas, etc.)? ¿Es fructífero decir NO al satisfacer los deseos a cualquier precio? ¿Es procedente decir NO al horario inadecuado de salidas y entradas en casa? ¿Es beneficioso decir NO al "salario excesivo" de fin de semana que se pide? ¿Es … ?

NO

¿ Te dicen tus padres de vez en cuando que no ?

☹ PROBLEMAS SOBRE FRACCIONES ☺

☞ NIVEL III ☜

1) **J**avi estudió Lengua durante $3\frac{2}{5}$ (nº mixto) de hora, a Matemáticas dedicó dos horas y para Inglés cinco sextos de hora. ¿**Qué fracción** de hora le **faltó para** llegar a las **siete horas** de estudio?

2) **E**n un pueblo han votado **9.900 personas** de las que tenían derecho a voto en unas elecciones, de las cuales **3/5** son **mujeres** y el **resto hombres**. ¿Cuántas **decenas de hombres** votaron?

3) **¿Q**ué **fracción** le **falta** a 2/10 para valer 7/20?

4) **¿C**uántos **dm** son los 2/5 **de** los 3/4 **de** 10 km?

5) **U**na familia gasta al mes 3/12 de sus ingresos mensuales en vestirse, 3/18 en calzado y 3/9 en alimentación. Si termina el mes con 540 **€**, ¿a cuánto ascienden sus **ingresos anuales**?

6) **U**n padre hace cinco partes de la **herencia** que van a recibir sus hijos, pero debido a una compra urgente que debe hacer gasta dos de las partes que había hecho. Lógicamente, esta pérdida de dinero la sufre la herencia de sus hijos.

a) ¿Qué parte de la herencia inicial recibe cada uno de los cinco hijos?

b) ¿Sabrías hacer la comprobación de este problema?

7) **E**n una **atracción ferial** de tiro con escopetas de balines los resultados de tres amigos fueron los siguientes: David acertó 8 de 10 tiros, Sergio 9 de 11 y Luis 12 de 15. ¿Quién tuvo peor puntería?

8) **Jiaona,** chica oriental (de China) muy inteligente y atractiva, pesa 16/22 kg del peso de su hermana. Si Jiaona pesa 40 kg, ¿cuánto pesa su hermana?

9) **Eva** quiere reducir un dibujo hasta un tamaño un poco menor que la mitad. Si sólo dispone de una fotocopiadora que reduce los 5/6, ¿cuántas veces debe repetir la fotocopia de la nueva que va obteniendo hasta encontrar el tamaño que busca?

10) **E**n una clase de **4º de E.S.O.** hay 18 chicas por cada 12 chicos. ¿Qué parte del total de esa sección hay de alumnos de cada sexo?

11) **L**os ¾ más 1/3 de **un número** valen 120. ¿Cuál es ese número?

12) **A** un camión se le estropean los 3/20 de la mercancia en un pequeño accidente. La carga que llevaba era de **7 Tm** (toneladas métricas) de fruta. Sabiendo que cada kg de fruta tiene aproximadamente 21/5 de unidades y que cada unidad vale 0'15 **€**, ¿cuánto dinero perdió?

13) **Mª Ángeles** ha hecho una compra de un precioso vestido para la fiesta de fin de año y le han rebajado 1/5 del precio que marcaba. Si ha tenido que pagar 152 **€**, ¿cuál era el valor inicial del vestido?

14) **U**na **cierta cantidad** es tal que los 2/3 de los ¾ de los 5/6 de dicha cantidad, aumentados en 30 **€**, igualan dicha cantidad. Halla cuál es.

15) **T**res personajes reparten cierta cantidad de euros: la 1ª toma la mitad menos 7; la 2ª, los 2/3 del resto y la 3ª los 15 euros que quedan. ¿Cuánto ha correspondido a cada uno?

16) **U**n ciclista tiene que hacer un entrenamiento de 1.440 hm y ya lleva recorridos 80.000 metros. ¿Qué fracción de km le falta por recorrer?

17) **U**n camión repartidor de gasolina está lleno. Deja en la 1ª gasolinera ¼ del depósito, 3/5 de lo que quedaba en la 2ª y para la 3ª quedaban 8400 decilitros. ¿Cuál es la capacidad en litros del depósito que llevaba el camión?

¡Tiempo! Como dicen en algunos concursos televisivos. Bueno, aunque seguramente son demasiados problemas, pero **vuelvo a reiterar** que están preparados para dos o tres cursos. Además, creo que la variedad y la progresiva dificultad ayudará bastante a los alumnos interesados en aprender. Y, no lo olvidemos, aprender requiere interés, trabajo, esfuerzo y, lógicamente, una cierta capacidad.

3.16.- DETECTAR ERRORES Y ANALIZARLOS I.
(resueltos)

A continuación aparecen distintas expresiones numéricas, unas desarrolladas (operadas) correctamente y otras no. Tu misión es detectar los posibles errores cometidos. Pero ten en cuenta esto: no puntúa nada decir si una es correcta y otra no, sólo ganarás positivos cuando expliques el por qué. Tú, como buen/a detective que eres, descubrirás velozmente aquellas que sean "inocentes" (correctas) distinguiéndolas de las culpables (falsas o incorrectas). Como habrás visto en juicios de algunas películas, para poder juzgar a alguien no basta sólo decir que es culpable, sino que es necesario e imprescindible demostrarlo. Bien, pues aquí igual. Así que en todas, sean correctas o falsas, debes dar tus explicaciones y señalar los errores, y, además, si son correctas y faltan pasos hacerlas debajo de forma completa, o si son incorrectas realizarlas debajo de la explicación de forma correcta.

1) $3 - \frac{1}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

2) $5 : \frac{-3}{5} = -3$

3) $\frac{-2}{7} = \frac{2}{-7} = -\frac{2}{7}$

4) $\frac{4+6}{-2} = 5$

5) $\left(2 - \frac{1}{2}\right) . 3 - 2 = \left(2 - \frac{1}{2}\right) . 1 = \frac{2}{1} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

6) $\frac{7}{6} + \frac{5}{6} = 2$

7) $\frac{6}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6-1}{5-3} = \frac{5}{2}$

8) $3 . \frac{-2}{5} . 0 . (-1) = \frac{+6}{5}$

9) $\frac{2}{6} : \frac{-3}{10} . \frac{-5}{-12} = \frac{2}{6} : \frac{-3.(-5)}{10.(-12)} = \frac{2}{6} : \frac{15}{-120} = \frac{2.(-120)}{6.15} = -\frac{8}{3}$

10) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} : \frac{2}{6} = \frac{3+4}{5} : \frac{2}{6} = \frac{7.6}{5.2} = \frac{21}{5}$

SOLUCIONES

1) Mal, porque así no se opera un entero y una fracción.
Bien es así → $3 - \frac{1}{2} = \frac{3.2-1}{2} = \frac{5}{2}$

2) Mal, porque no ha dividido bien.
Bien es así → $\frac{5}{1} : \frac{-3}{5} = \frac{5.5}{1.(-3)} = \frac{-25}{3}$

3) Es correcto. Todas son iguales. Sin embargo, debes acostumbrarte a colocar el signo negativo delante de la fracción o en el numerador, porque a veces se olvida cuando se queda en el denominador.
$\frac{-2}{7} = \frac{2}{-7} = -\frac{2}{7}$

4) Erróneo, porque ese ha olvidado el signo negativo del denominador.
Bien es así → $\frac{4+6}{-2} = -5$

5) Mal, porque antes de restar se debe multiplicar.
Bien → $\left(\frac{3}{2}\right) . 3 - 2 = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}$

6) Correcto. Como tienen los mismos denominadores, se operan sólo los numeradores.
Bien → $\frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2$

7) Error. Al sumar y/o restar fracciones de distinto denominador se debe hacer por el método de mínimo.
Bien → $\frac{6.3}{15} - \frac{1.5}{15} = \frac{18-5}{15} = \frac{13}{15}$

8) Mal. Al multiplicar por 0 da 0.
$3 . \frac{-2}{5} . 0 . (-1) = 0$

9) El error está en que no ha efectuado las : y . de izquierda a derecha.
Bien → $\frac{2.10}{6.(-3)} . \frac{-5}{-12} = \frac{2.10.(-5)}{6.(-3).(-12)} = \frac{-2.2.5.5}{2.3.3.2.2.3} = -\frac{25}{54}$

10) Mal, porque ha sumado antes de dividir.
Bien → $\frac{3}{5} + \frac{4.6}{5.2} = \frac{3}{5} + \frac{12}{5} = \frac{15}{5} = 3$

DETECTAR ERRORES Y ANALIZARLOS II
(para resolver).

En esta columna de ejercicios aprenderás, ayudándote de los ejemplos resueltos de la página anterior y una vez hechos y corregidos los de ésta, a descubrir operaciones mal hechas, expresiones incorrectas o igualdades falsas. Si logras enterarte bien, llevarás mucho ganado para no tener estos mismos errores en tus tareas matemáticas o en los controles. ¡ÁNIMO! Pero empieza con atención e interés, porque si no es así ...

1) $\frac{7}{5} + 3 = \frac{7+3}{5} = \frac{10}{5} = 2$

2) $\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{7}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{35}{18}$

3) $\frac{12 + 3}{-5} = 3$

4) $\frac{5}{4} : \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{4} : \frac{2}{18} = \frac{90}{8} = \frac{45}{4}$

5) $10 \cdot \frac{3}{5} = \frac{53}{3}$

6) $10 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$

7) $10 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$

8) $\frac{3}{5} + 10 = \frac{30}{5}$

9) $\frac{3}{5} - 10 = \frac{-47}{5}$

10) $\frac{7 + 2x}{3} = \frac{9x}{3} = 3x$

11) $\frac{5}{10} - \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10}\right) = \frac{5}{10} - \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{5-1+2}{10} = \frac{6}{10} = \frac{2.3}{2.5} = \frac{3}{5}$

12) $12 : \frac{5}{6} = \frac{12:6}{5} = \frac{2}{5}$

13) $3 : \frac{1}{4} : (-2) \cdot \frac{5}{6} = \frac{-72}{6} = -12$

14) $\frac{3}{11} - \frac{2}{11} + \frac{7}{11} = \frac{8}{11}$

15) $\frac{1}{4} : \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{4} : \frac{2}{5} = \frac{5}{8}$

16) $\frac{9}{6} + \frac{1}{5} = \frac{9+1}{6+5} = \frac{10}{11}$

17) $\frac{15}{6} : (-2) = -\frac{5}{4}$

18) $\frac{-20}{-3} \cdot (-6) = -40$

19) $\frac{2}{3} \cdot \frac{-1}{4} \cdot 0 \cdot \frac{5}{7} = \frac{-10}{84} = -\frac{5}{42}$

20) $\frac{-4}{10} - 3 = \frac{-17}{10}$

EJERCICIOS DE REPASO
(para resolver).

21) Representar gráficamente en barritas y en una recta:

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{8}{3}$ d) $\frac{-6}{4}$ e) $\frac{7}{-8}$

22) Indicar en las siguientes fracciones cuáles son propias, cuáles impropias y cuáles iguales a la unidad. También, convertirlas en decimales o enteros, según cada una.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{6}{6}$ d) $\frac{7}{3}$ e) $\frac{2}{-5}$

23) Convertir las fracciones impropias en números mixtos y los números mixtos en fracciones.

a) $\frac{9}{4}$ b) $2\frac{1}{5}$ d) $\frac{12}{7}$ e) $3\frac{4}{5}$

24) Transformar los números decimales en fracciones decimales y las fracciones decimales en números decimales.

a) $\frac{5}{100}$ b) 0'056 d) $\frac{3451}{10}$ e) 80'3

25) Escribir la fracción opuesta y la inversa de cada una.

a) $\frac{6}{5}$ b) $\frac{-1}{4}$ d) $\frac{-3}{8}$ e) -2

26) Averiguar qué parejas de fracciones son equivalentes.

a) $\frac{8}{10}$ y $\frac{4}{5}$ b) $\frac{-2}{6}$ y $\frac{1}{3}$ d) $\frac{-12}{15}$ y $\frac{4}{-5}$

27) Simplificar en la primera fila y amplificar hasta tres veces en la segunda fila.

a) $\frac{210}{840}$ b) $\frac{1260}{252}$ d) $\frac{-5600}{-35000}$

e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{1}{-5}$ g) $\frac{6}{7}$ h) $\frac{-4}{-9}$

28) a) $\frac{6}{10}$ de $\frac{10}{15} =$ b) $\frac{4}{12}$ de $\frac{1}{8}$ de 60 € =

29) Ordenar en forma creciente y decreciente, reduciendo a M.D.C. por el método del mínimo y colocando el signo correspondiente.

a) $\frac{8}{10}$, $\frac{7}{-5}$, $\frac{-2}{6}$ y $\frac{1}{3}$

b) $\frac{4}{10}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{-5}{4}$ y $\frac{6}{30}$

30) a) $5 - \frac{6}{-7} =$ b) $\frac{-1}{5} + 4$

c) $-2 + \frac{-3}{8} =$ d) $1 + \frac{-2}{-6} =$

31) $\frac{4}{10} - \frac{6}{5} + \frac{-1}{-25} =$

32) $\frac{5}{2} - \frac{1}{8} : \frac{2}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{9}{4} =$

33) $\frac{-3}{4} : \left(\frac{1}{5} - 2\right) + 1\frac{1}{3} =$

Ejercicios más complicados para aquellos que tenéis ganas de aprender más y mejor.

1) $\dfrac{5}{6x} + \dfrac{-1}{6x} - \dfrac{-10}{-6x} =$

2) $\dfrac{1}{4a} - \dfrac{20}{24a} + \dfrac{3}{8a} =$

3) $\dfrac{-8x}{20} + \dfrac{x}{-15} - \dfrac{-3x}{12} + \dfrac{-9x}{12} =$

4) $\dfrac{3}{-6} + \dfrac{-1}{2} \cdot \dfrac{5}{-4} - \dfrac{2}{5} : \dfrac{-3}{8} =$

5) $\left(-\dfrac{2}{10} + 3\right) : \dfrac{-1}{6} - 2\dfrac{4}{5} =$

6) $\dfrac{\frac{10}{12}}{5} =$

7) $\dfrac{18}{\frac{6}{14}} =$

8) $\dfrac{\frac{20}{15}}{\frac{24}{21}} =$

9) $\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{10}} =$

10) $\dfrac{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{6}}{\frac{6}{8} - \frac{1}{4}} =$

11) $\dfrac{\frac{1}{5} + \frac{3}{8} : \frac{2}{4}}{\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} - \frac{9}{2}} =$

12) $4\dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{2} : 10 \cdot 6\dfrac{1}{15} =$

13) $\dfrac{2}{-3} : 5 \cdot \dfrac{0}{4} - \dfrac{1}{5} : 25 =$

14) $\dfrac{5}{2} : \left(\dfrac{-2}{4} + \dfrac{1}{5} : \dfrac{-2}{6} \cdot \dfrac{-1}{12}\right) =$

15) $6 - \dfrac{3}{5} : \dfrac{-1}{2} . 4\dfrac{1}{3} - \left[\dfrac{2}{4} + 10:2.\dfrac{1}{3} - \left(3 + \dfrac{-2}{4}\right)\right] =$

16) $10 - \left(\dfrac{3}{4} : \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{-2}{5}\right) : \dfrac{-3}{5} - \dfrac{18}{2} =$

17) $\dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{4} + \frac{10}{12}}{\frac{4}{5} - \frac{3}{10}} =$

18) $\dfrac{\frac{2}{3} - \frac{4}{6} : \frac{1}{2}}{\frac{10}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{8}} =$

19) $\dfrac{2}{-6} - \dfrac{-3}{-4} \cdot \left(1 - \dfrac{5}{2} + 3\dfrac{1}{4} - \dfrac{7}{4}\right) =$

20) $\dfrac{\frac{3}{6} : \frac{1}{4} - \frac{2}{3}}{\frac{5}{8} + \frac{7}{2}} =$

Repasemos algunas cosas:

➡ Cuando te pidan operar o calcular una fracción "de" algo, ese "de" significa multiplicar.

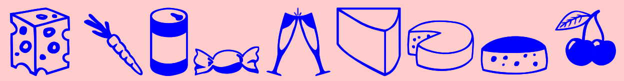
➡ Al operar fracciones con enteros, se hace como hemos explicado en la página 110 ó colocando un 1 de denominador y aplicando el método del mínimo.

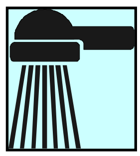
➡ Si en operaciones con fracciones hay signos en el denominador, debes colocarlo en el numerador, porque es muy frecuente que éstos se olviden al ir operando.

➡ Generalmente, en cualquier cálculo de fracciones es más conveniente simplificar antes todo lo que sea posible y, después, ya operar.

➡ El método del mínimo se debe usar siempre para sumar y restar las fracciones, pero no cometas el error de aplicarlo en productos y divisiones.

➡ Si hay que operar fracciones que tienen fracciones en el numerador y/o denominador, se operan las que hay en el numerador hasta obtener una fracción, después las que hay en el denominador, y cuando ya nos quedan las dos fracciones resultados (una arriba y otra abajo) las colocas mejor una junto a otra con los dos puntos de dividir en medio y así te equivocarás menos.

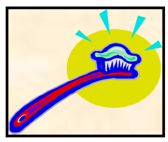




Tener una HIGIENE adecuada significa que tus hábitos de lavado y limpieza, principalmente, son los convenientes para tu salud.

Es indudable que poseer una serie de reglas y normas que cuiden tu salud te dará una mejor calidad de vida. Entre los hábitos más saludables podríamos citar muchos, pero yo me permito mencionarte dos muy beneficiosos:

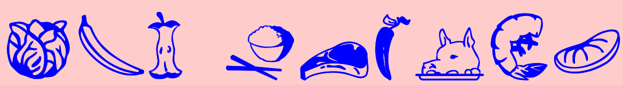
LA DUCHA y EL LAVADO DE DIENTES.



Cada uno tendrá su forma de ducharse y de lavarse los dientes, pero permíteme decirte dos cosas:

→ Es muy bueno terminar de ducharse con agua no caliente, ni tampoco templada, que puede ser fresquita en otoño/invierno, o fría en primavera/verano.

→ Al lavarse los dientes no debes cepillar las encías, y los dientes y muelas se cepillan de arriba-abajo los de arriba y de abajo-arriba los de abajo.



3.17.- Expresiones decimales. (Preguntas complementarias para los alumnos más capacitados)

Número decimal es todo **aquel número que no es entero**, es decir, que no pertenece a **"Z"**. En el siguiente esquema podemos estudiar y distinguir las diferentes clases de números decimales.

NÚMEROS DECIMALES

- **NÚMEROS DECIMALES LIMITADOS**: Aquellos que se obtienen de una división cuyo resto, antes o después, es cero.
- **NÚMEROS DECIMALES ILIMITADOS**: Son los números decimales provenientes de divisiones o raíces inexactas.
  - **PERIÓDICOS:** Aquellos números decimales en los que antes o después se empiezan a repetir cifras decimales de una misma forma periódica, es decir, siempre las mismas y en el mismo orden.
    - **PERIÓDICOS PUROS:** Las cifras repetidas forman el periodo.
    - **PERIÓDICOS MIXTOS:** Las cifras decimales no repetidas forman el anteperiodo y las repetidas el periodo.
  - **NO PERIÓDICOS:** (se obtienen de raíces inexactas, que veremos en el próximo tema) Números decimales ilimitados en los que antes o después se empiezan a repetir cifras decimales pero nunca de una forma periódica, o sea, que se repiten pero nunca las mismas y en el mismo orden. No se pueden representar en forma de fracción, o lo que es lo mismo, nunca se obtienen de una división. Se obtienen al resolver raíces cuadradas, o de otro índice, que no dan exactas (cuyo resto nunca es cero).

EJEMPLOS DE LAS DIFERENTES CLASES DE NÚMEROS DECIMALES:

⊗ Números decimales limitados → $\left[\frac{2}{5} = 0'4 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{parte entera} \to 0 \\ \text{parte decimal} \to 4 \end{array}\right]$; $\left[\frac{427}{8} = 53'375 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{parte entera} \to 53 \\ \text{parte decimal} \to 375 \end{array}\right]$

⊗ Números decimales ilimitados periódicos puros → $\left[\frac{16}{12} = 1'33333\ldots = 1'\widehat{3} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{parte entera} \to 1 \\ \text{parte decimal (periodo)} \to 3 \end{array}\right]$; $\left[\frac{50}{11} = 4'\widehat{54}\right]$

A la parte decimal que se repite se le llama periodo, y en lugar de repetir las cifras se le pone un signo parecido a un sombrerito que nos indica qué cifras se repiten, con lo cual no es necesario poner puntos suspensivos ni repetirlas.

⊗ Números decimales ilimitados periódicos mixtos → $\left[\frac{239}{90} = 2'6555555555\ldots = 2'6\widehat{5} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{parte entera} \to 2 \\ \text{parte decimal}: \begin{array}{l} \text{anteperiodo} \to 6 \\ \text{periodo} \to 5 \end{array} \end{array}\right]$

⊗ Números decimales ilimitados no periódicos → $\left[\sqrt{10} = \pm\, 3'16227766\ldots\right]$; $\left[\sqrt{806} = \pm\, 28'39013913\ldots\right]$

Aunque se repiten cifras, pero nunca de forma periódica.

3.18.- Fracciones generatrices. (Preguntas complementarias para los alumnos más capacitados)

Se llama **fracción generatriz de un número** a aquella **fracción** irreducible (o no lo es y se reduce) **de la que procede** dicho número. Veamos las de los distintos números:

a) Fracción generatriz de un número entero.

Para hallar la fracción generatriz de cualquier número entero es suficiente con ponerle de denominador la unidad, aunque cualquier ampliación de esta fracción de denominador la unidad daría como resultado dicho número entero.

$$\otimes\ 7 \rightarrow \frac{7}{1},\ \text{ó}\ \frac{14}{2},\ \text{ó}\ \frac{-21}{-3},\ \text{ó}\ \frac{28}{4},\ \ldots,\ \text{ó}\ \frac{70}{10},\ \text{ó}\ \frac{-1407}{-201},\ \ldots$$

$$\otimes\ -23 \rightarrow \frac{-23}{1},\ \text{ó}\ \frac{46}{-2},\ \text{ó}\ \frac{-69}{3},\ \ldots,\ \text{ó}\ -\frac{230}{10},\ \text{ó}\ \frac{2185}{-95},\ \ldots$$

b) Fracción generatriz de un número decimal limitado.

El numerador está formado por la parte entera y la parte decimal prescindiendo de la coma.

El denominador se forma con la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal.

$$\otimes\ 0'35 = \frac{35}{100} \qquad \otimes\ 48'6 = \frac{486}{10} \qquad \otimes\ 5605'324 = \frac{5605324}{1000}$$

$$\otimes\ 451'0724 = \frac{4510724}{10000} \qquad \otimes\ 0'00021 = \frac{21}{100000} \qquad \otimes\ 6'9 = \frac{69}{10}$$

c) Fracción generatriz de un número decimal ilimitado periódico puro.

El numerador está formado por la diferencia entre la parte "entera y el periodo" y (menos) "la parte entera".

El denominador está formado por tantos nueves como cifras tiene el periodo.

$$\otimes\ 0'42 = \frac{42}{99} \qquad \otimes\ 0'906 = \frac{906}{999} \qquad \otimes\ 9802'7003 = \frac{9807003 - 9802}{9999} = \frac{98017201}{9999}$$

$$\otimes\ 74'8 = \frac{748 - 74}{9} = \frac{674}{9} \qquad \otimes\ 5'65019 = \frac{565019 - 5}{99999} = \frac{565014}{99999} \qquad \otimes\ 0'5 = \frac{5}{9}$$

d) Fracción generatriz de un número decimal ilimitado periódico mixto.

El numerador está formado por un número igual a la parte entera y la parte decimal sin la coma menos el número que forma la parte entera y el anteperiodo (parte decimal no periódica).

El denominador está formado por tantos nueves como cifras tiene el periodo y tantos ceros como cifras tiene el anteperiodo.

$$\otimes\ 0'85\overset{\frown}{7} = \frac{857 - 85}{900} = \frac{772}{900} \qquad \otimes\ 612'07\overset{\frown}{4}\overset{\frown}{8}\overset{\frown}{5} = \frac{61207485 - 61207}{99900} = \frac{61146278}{99900}$$

$$\otimes\ 35'207\overset{\frown}{6} = \frac{352076 - 35207}{9000} = \frac{316869}{9000} \qquad \otimes\ 0'0001\overset{\frown}{4}\overset{\frown}{7} = \frac{147 - 1}{99000} = \frac{146}{990000}$$

e) Fracción generatriz (¡) de un número decimal ilimitado no periódico.

Los números decimales ilimitados que no tienen cifras decimales repetidas de una forma periódica no tienen fracciones generatrices, nunca provienen de una división. Se obtienen de raíces inexactas, que veremos en el tema 4.

3.19.- INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE NÚMERO RACIONAL.

(Ampliaciones complementarias para los alumnos más capacitados)

Ya explicamos en su momento –en el tema 1 (LOS NÚMEROS ENTEROS)- la necesidad de ampliar el conjunto de números naturales e introducir el concepto de número entero. Resumiendo, podemos decir que los números enteros son todos aquellos que no tienen parte decimal, sean positivos o negativos, y dentro del conjunto de los números **enteros ("Z")** está el conjunto de los números **naturales** ("N", el 0 y todos los positivos). Eso se escribe así: **N ⊂ Z**, y se lee: conjunto de los naturales **incluido** en el conjunto de los números enteros.

Bien, pues ahora intentaré explicarte la necesidad de volver a ampliar otra vez los conjuntos de números conocidos **("N" y "Z")**. Hay situaciones que no se pueden representar ni con naturales ni con enteros, es decir, que necesitamos otros números que no sean naturales ni enteros, que formarán, junto con los "Z", un conjunto más amplio –grande (i) para que lo entiendas- que incluya (⊂) dentro de él a los naturales y enteros. Por ejemplo, cada vez que se nos presentan situaciones, problemas, circunstancias en la que necesitamos dividir y el resultado (el cociente) nos da números decimales, sabemos ya que esos números decimales no pertenecen a los naturales (∉ N) ni a los enteros (∉ Z). Y si a los enteros, que son infinitos, añadimos **(ampliamos)** todos los números decimales (infinitos) que provengan de divisiones, se forma un nuevo conjunto de números que llamaremos **CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES**, nombrado con la letra **"Q".**

Así que los números racionales son todas las fracciones, o sea, todos aquellos números, positivos o negativos, decimales o no, que salen de divisiones. (Ya veremos, o verás en otro curso, que hay decimales que no salen de una división, sino que provienen de raíces inexactas –números decimales no periódicos- y, por consiguiente, no pueden representarse en forma de fracción, o sea, que aunque son decimales no pertenecen al conjunto de los números racionales, y se llaman números irracionales)

Hay un concepto difícil de entender: **la distinción existente entre NÚMERO RACIONAL y FRACCIÓN**. Pon concentración y esfuerzo de tu parte a ver si lo conseguimos:

- Un **número racional** está formado por infinitas fracciones que son equivalentes entre sí.
- Una **fracción** es sólo una de las infinitas fracciones que pueden representar a un número racional.
- A la fracción irreducible de las infinitas equivalentes que representan a un número racional se le llama **representante canónico** de ese número racional.

No te enteras muy bien, ¿verdad? Hagamos otro intento con un ejemplo que explique estos conceptos difíciles. Imagina tu clase; bien, pues:

- El número racional sería la clase con todos los alumnos.
- Una fracción sería cada alumno, que puede muy bien representar a toda la clase en un determinado momento: en una reunión, en un partido, en ...
- El representante canónico sería el delegado, que es quien mejor representa a la clase en todos los sitios.

¿Qué? Medio medio solamente. Bueno ya lo entenderás mejor al practicarlo.

Ateniéndonos a los conceptos matemáticos, podemos poner ejemplos de varios números racionales a los que llamaremos con letras del alfabeto griego. Veamos:

$$\text{Nº racional } \alpha = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{-2}{-10}, \frac{3}{15}, \frac{4}{20}, \frac{5}{25}, \frac{-6}{-30}, \frac{-7}{-35}, \frac{8}{40}, \frac{9}{45}, \ldots \right\}$$

$$\text{Nº racional } \beta = \left\{ \frac{-2}{3}, \frac{-6}{9}, \frac{12}{-18}, -\frac{20}{30}, \frac{-24}{36}, \frac{-22}{33}, \frac{-50}{75}, -\frac{200}{300}, \ldots \right\}$$

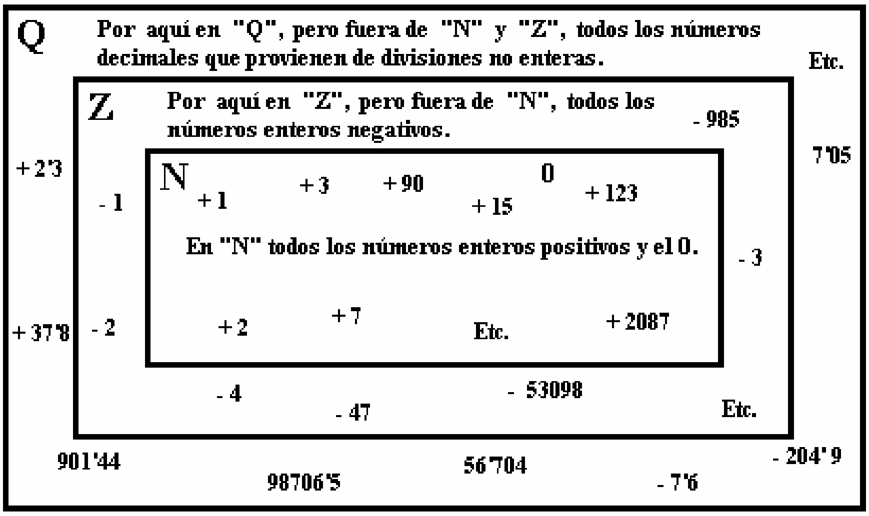
$$\text{Nº racional } \gamma = \left\{ \frac{500}{3}, \frac{1000}{6}, \frac{1500}{9}, \frac{2000}{12}, \frac{-3000}{-18}, \frac{5000}{30}, \ldots \right\}$$

. . . etc.

Las fracciones $\frac{1}{5}$, $\frac{-2}{3}$ y $\frac{500}{3}$ son, respectivamente, los **representantes canónicos** de cada número racional: α (se lee alfa), β (se lee beta), γ (se lee gamma). No es necesario llamarlos con letras griegas, se pueden designar con otras. (Comprueba que todas las fracciones de cada nº racional son equivalentes). Repasemos los distintos conjuntos de números:

Partiendo de los números naturales, hemos visto la necesidad de ampliarlos para resolver situaciones –como las temperaturas bajo cero, la cantidades que se deben, la épocas antes de Jesucristo, bajo el nivel del mar, etc.- **que no tenían solución en "N", con lo que obteníamos los números enteros ("Z")** –en los que entran todos los naturales (0, 1, 2, 3, 4, 5, ... + ∞) más todos los enteros negativos (- ∞ . . . – 5, – 4, – 3, –2, –1)-; **después hemos comprobado que existen otras situaciones** –divisiones con cocientes decimales- **que tampoco tienen solución en "Z", porque son números decimales, y volvemos a necesitar ampliar el conjunto "Z" hasta obtener el conjunto "Q" de los números racionales** –en el que entran todos lo enteros (+, – y el 0) más todos los números decimales que provienen de divisiones no enteras-.

Aunque los conjuntos de números son infinitos, representando gráficamente en diagramas lo anterior quedaría así:



O escribiendo los símbolos matemáticos adecuados así:

$N \subset Z$; $Z \subset Q$; $N \subset Z \subset Q$ (N incluido en Z, y Z incluido en Q)

Por último, fíjate bien en los siguientes apartados, a ver si los comprendes. (¡OJO! No vale para nada aprendértelos de memoria; lo eficaz es entenderlos, así podrás resolver los ejercicios correctamente).

a) Todo nº natural es entero, y también racional.
b) Todo nº entero es racional.
c) No todos los números enteros son naturales; por ejemplo, los negativos no $\notin$ N.
(Recuerda que los símbolos $\in$ y $\notin$ significan, respectivamente, pertenece y no pertenece)
d) No todos los racionales son enteros; por ejemplo, las divisiones que dan decimales no $\notin$ Z.
e) No todos los racionales son naturales; ejemplo: los negativos y todos los decimales no $\notin$ N.

Veamos algunos ejercicios resueltos sobre **CLASIFICACIONES DE NÚMEROS :**

1) – 10 → $\notin$ N, $\in$ Z, $\in$ Q
2) – 18 / – 9 = 2 → $\in$ N, $\in$ Z, $\in$ Q
3) + 3'45 → $\notin$ N, $\notin$ Z, $\in$ Q
4) – 15 : 2 = – 7'5 → $\notin$ N, $\notin$ Z, $\in$ Q
5) – 10 / 12 = – 0'8 → $\notin$ N, $\notin$ Z, $\in$ Q
6) 13.508 → $\in$ N, $\in$ Z, $\in$ Q
7) $\sqrt{81}$ = ± 9 → $\in$ N, $\in$ Z, $\in$ Q
8) $\sqrt{2'25}$ = ± 1'15 → $\notin$ N, $\notin$ Z, $\in$ Q
9) $\sqrt{15}$ = ± 3'8729… → $\notin$ N, $\notin$ Z, $\notin$ Q

NOTA : aunque hasta el próximo tema no explicaremos las raíces cuadradas, incluyo aquí estos tres ejercicios con raíces para aquellos que: o las sabéis ya de 6º, ó quizás podréis comprenderlo antes de llegar al tema 4.

EJERCICIOS resueltos sobre números decimales, fracciones generatrices y clasificación de números:

1) $\dfrac{16}{11} = 1'\overset{\frown}{45} \rightarrow \begin{cases} \text{Número decimal ilimitado periódico puro} \\ \text{Parte entera} \rightarrow 1 \\ \text{Parte decimal} \rightarrow \text{periodo} \rightarrow 45 \\ \notin N , \notin Z , \in Q \end{cases}$

2) $0'6\overset{\frown}{78} = \dfrac{678 - 6}{990} = \dfrac{672}{990} \rightarrow \begin{cases} \text{Número decimal ilimitado periódico mixto} \\ \text{Parte entera} \rightarrow 0 \\ \text{Parte decimal} \rightarrow \begin{cases} \text{anteperiodo} \rightarrow 6 \\ \text{periodo} \rightarrow 78 \end{cases} \\ \notin N , \notin Z , \in Q \end{cases}$

3) $\dfrac{807}{6} = 134'5 \rightarrow \begin{cases} \text{Número decimal limitado.} \\ \text{Parte entera} \rightarrow 134 \\ \text{Parte decimal} \rightarrow 5 \\ \notin N , \notin Z , \in Q \end{cases}$

4) $-459 = -\dfrac{459}{1} \rightarrow \begin{cases} \text{Número entero} \\ \notin N , \in Z , \in Q \end{cases}$

5) $\sqrt{40} = \pm\ 6'3245553\ldots \rightarrow \begin{cases} \text{Número decimal ilimitado no periódico} \\ \text{Parte entera} \rightarrow 6 \\ \text{Parte decimal} \rightarrow 3245553\ldots \text{ (no tiene periodo)} \\ \notin N , \notin Z , \notin Q \end{cases}$

Los números como éste, que provienen de raíces inexactas, se llaman números IRRACIONALES. Los veremos en el tema 4. Si siguiéramos haciendo la raíz hasta sacar miles de cifras decimales, se repetirían lógicamente muchas cifras, pero nunca de forma periódica. Estos números irracionales no se pueden obtener de una división, es decir, no tienen fracciones generatrices.

6) $-0'0053 = \dfrac{-53}{10000} \rightarrow \begin{cases} \text{Número decimal limitado.} \\ \text{Parte entera} \rightarrow 0 \\ \text{Parte decimal} \rightarrow 0053 \\ \notin N , \notin Z , \in Q \end{cases}$

7) $8204'009\overset{\frown}{5} = \dfrac{82040095 - 8204009}{9000} = \dfrac{73836086}{9000} \rightarrow \begin{cases} \text{Número decimal ilimitado periódico mixto} \\ \text{Parte entera} \rightarrow 8204 \\ \text{Parte decimal} \rightarrow \begin{cases} \text{anteperiodo} \rightarrow 009 \\ \text{periodo} \rightarrow 5 \end{cases} \\ \notin N , \notin Z , \in Q \end{cases}$

8) $\dfrac{-171'02}{-0'34} = 503 \rightarrow \begin{cases} \text{Número entero (y natural)} \\ \in N , \in Z , \in Q \end{cases}$

9) $\sqrt{732'2436} = \pm\ 27'06 = \dfrac{2706}{100} \rightarrow \begin{cases} \text{Número decimal limitado} \\ \text{Parte entera} \rightarrow 27 \\ \text{Parte decimal} \rightarrow 06 \\ \notin N , \notin Z , \in Q \end{cases}$

Al resolver esta raíz, como es exacta (resto 0), se obtiene un número decimal limitado, que también se obtiene de la fracción generatriz expresada.

EJERCICIOS PARA RESOLVER

En los ejercicios de la siguiente columna debes hacer lo mismo que en los 9 ejercicios resueltos de la página anterior.

NOTA: los ejercicios donde aparezcan raíces cuadradas no es obligatorio hacerlos, pues todavía no las hemos explicado. Sin embargo, aquellos que ya las sabéis porque os la han explicado en cursos anteriores, o los que las hagan con la calculadora, pues los resolvéis.

1) $\dfrac{385}{90} =$	**2)** $0'34\overset{\frown}{9} =$
3) $\dfrac{1380}{6} =$	**4)** $-87 =$
5) $\sqrt{75} =$	**6)** $-0'0004 =$
7) $846'23\overset{\frown}{5}\overset{\frown}{5}\overset{\frown}{8} =$	**8)** $\dfrac{52'7}{-3'1} =$
9) $\sqrt{39'69} =$	**10)** $-874'7 =$
11) $36 =$	**12)** $\sqrt{25} =$
13) $\dfrac{11481}{9000} =$	**14)** $5'\overset{\frown}{9}\overset{\frown}{9}\overset{\frown}{9} =$
15) $0'0000080\overset{\frown}{5} =$	**16)** $\dfrac{225}{15} =$
17) $\sqrt{46790} =$	**18)** $\dfrac{-57}{13} =$
19) $\dfrac{89}{9990} =$	**20)** $\dfrac{67835}{32} =$
21) $\dfrac{375}{990000} =$	**22)** $0'5\overset{\frown}{8}\overset{\frown}{1} =$
23) $\dfrac{1380}{21} =$	**24)** $-405 =$
25) $\sqrt{250} =$	**26)** $-0'00568 =$
27) $67'895\overset{\frown}{9} =$	**28)** $\dfrac{-1'68}{-0'24} =$
29) $\sqrt{0'6084} =$	**30)** $-0'98 =$
31) $107 =$	**32)** $\sqrt{8} =$
33) $\dfrac{8034}{900} =$	**34)** $20'\overset{\frown}{9} =$
35) $1'005\overset{\frown}{0}\overset{\frown}{7} =$	**36)** $\dfrac{187}{17} =$
37) $\sqrt{8901'3} =$	**38)** $\dfrac{209}{50} =$
39) $\dfrac{60}{99000} =$	**40)** $\dfrac{90'234}{16} =$

41) Realiza las siguientes operaciones:

a) $3'\overset{\frown}{6} - 0'\overset{\frown}{7}\overset{\frown}{5} =$

b) $0'4\overset{\frown}{5} + 10'\overset{\frown}{4} - 0'2 =$

c) $2'3\overset{\frown}{5} \,.\, 0'00\overset{\frown}{1}\overset{\frown}{2} - 4'5 =$

d) $30'\overset{\frown}{6} : 2'4 =$

e) $\left(-5'\overset{\frown}{1}\right)^3 =$

f) $5'\overset{\frown}{2} : 0'1\overset{\frown}{6} - 40 + 28'4 \,.\, (-5)^2 =$

g) $\left(2'\overset{\frown}{9} - 0'2\overset{\frown}{3}\right) : (-5) + 3 \,.\, 0'9 =$

42) Completa el siguiente esquema de clasificaciones de números que ya hemos estudiado:

Números Racionales →
- **Enteros**
  - **Naturales**
  - ______
- ______
  - ______ **limitado**
  - ______ ______
    - ____ ____
    - ____ ____

43) ¿Hay algunos números decimales que no pertenezcan a los números racionales? ¿Cómo se llaman? ¿De dónde se pueden obtener?

44) Completa la siguiente frase correctamente:
"Los números racionales son todos aquellos que se pueden expresar mediante ___ ________ ."

45) Al dividir un número entre **6** hemos obtenido la expresión decimal $7'1\overset{\frown}{6}$. ¿De qué número se trata?

46) ¿Está bien o está mal la igualdad siguiente?

$$1'\overset{\frown}{2} + 1'\overset{\frown}{5} = 3$$

Hay que explicar o demostrar la contestación.

47) Divide los números del **6** al **15** entre **7** y vas anotando qué clase de número te dan los cocientes respectivos.

48) Hemos dividido **174** entre otro número y nos ha dado $1'3\overset{\frown}{1}\overset{\frown}{8}$ de resultado. ¿Qué número ha sido el divisor?

49) Responde si son verdaderos o falsos, con las explicaciones oportunas, los enunciados siguientes:

a) Todos los números decimales son racionales.
b) Es imposible hallar la fracción genetariz de un entero negativo.
c) El periodo de un número decimal corresponde a las cifras que se repiten.
d) Todos los números decimales tienen fracciones generatrices.
e) Los números enteros también son números racionales.

50) Una dificililla. ¿Cuál es el resultado de la siguiente expresión?

$$\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000} + \ldots =$$